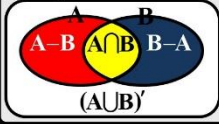


# ریاضی جامع (۳) گام اول تا پنجم

- $A \cap (A \cup B)$
- $A \cup (A \cap B)$
- $(A - B) \cap (A \cup B')$
- $(A \cap B') - (B - A)$
- $(A - B)' \cap (A \cup B) \cap A'$
- $A - (B - (A \cap B))$
- $(A \cap B') - A$

$A - B' =$   
 $A \cap B' =$

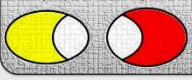


$A - B' =$   
 $A \cap B' =$   
 $A \cup B' =$   
 $A' - B =$   
 $A' \cap B =$   
 $A' \cup B =$

## مجموعه و قوانین آن

شمارش اعضا در مجموعه ها :

$n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$




$n(A) = 15$   
 $n(B) = 11$   
 $n(A \cup B) = 21$

$n(A \cap B) = ?$

### مجموعه های متاهی و نامتاهی

$A = \{ \}$   
 $B = \{ a \}$   
 $C = \{ a, b, e \}$   
 $D = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$   
 $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$

جبر مجموعه ها



$A \cup A = A, A \cap A = A$   
 $A \cup U = U, A \cap U = A$   
 $A \cup \emptyset = A, A \cap \emptyset = \emptyset$   
 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$   
 $A, B \subseteq A \cup B, A \cap B \subseteq A, B$   
 $(A \cap B)' = A' \cup B'$   
 $A \cup A' = U, A \cap A' = \emptyset$   
 $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B', A - B = A$   
 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$   
 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$   
 $A \subseteq B \iff A \cup B = B, A \cap B = A, B' \subseteq A'$   
 $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B) \iff (A')' = A, \emptyset = U, U = \emptyset$

از دانش آموزان یک کلاس دوازدهم ۱۶ نفر عضو تیم تنیس، ۱۸ نفر عضو تیم فوتبال و ۵ نفر عضو هر دو تیم هستند. اگر ۲ نفر از دانش آموزان این کلاس عضو هیچ تیمی نباشند، کدام نادرست است؟

(۱) ۱۳ نفر فقط عضو تیم فوتبال اند.  
(۲) ۲۴ نفر فقط عضو یک تیم اند.  
(۳) ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال نیستند.  
(۴) ۲۷ نفر حداکثر عضو یک تیم هستند.

اگر  $n(A) = 6, n(B) = 4, n(A \cap B) = 2$  آنگاه حاصل عبارت  $\frac{n(A \cup B)}{n(A) + n(B)}$  کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{6}$   
(۲)  $\frac{2}{5}$   
(۳)  $\frac{3}{6}$   
(۴)  $\frac{4}{25}$

اگر  $n(B - A) = 23, n(A) = 3n(B) = 4n(A \cap B)$  آنگاه  $n(A \cup B)$  کدام است؟

(۱) ۱۶۰  
(۲) ۱۶۱  
(۳) ۱۶۲  
(۴) ۸۱

مثال: مجموعه  $\{ \emptyset, \{ \}, \{ 1, 2 \}, \{ 2, 1 \}, \{ 1, 2, \{ 1, 2 \} \}$  چند زیرمجموعه محض (سره) دارد؟

(۱) ۳۲  
(۲) ۳۱  
(۳) ۳۰  
(۴) ۲۹

مثال: کدام یک از اعداد زیر به مجموعه A متعلق است؟  
 $A = \{ 2^a \times 3^b \mid a, b \in \mathbb{N}, a + b = 5 \}$

(۱) ۸۳  
(۲) ۱۶۲  
(۳) ۱۵۴  
(۴) ۱۷۴

مثال: از دانش آموزان یک کلاس ۲۷ نفری ۱۹ نفر فوتبال و ۱۵ نفر بسکتبال بازی می کنند. حداقل چند نفر: فقط (ف) فقط (ب) (هر دو رشته) (هیچ کدام) حداکثر چند نفر: فقط (ف) فقط (ب) (هر دو رشته) (هیچ کدام)

سره: اگر  $A = \{ 1, 2, 3, 4 \}$  و  $B = \{ 2, 3, 4, 5 \}$  باشد، چند مجموعه مانند X وجود دارد که در رابطه زیر صدق می کند؟  
 $(A \cap B) \subseteq X \subseteq (A \cup B)$

(۱) ۲  
(۲) ۳  
(۳) ۴  
(۴) ۵

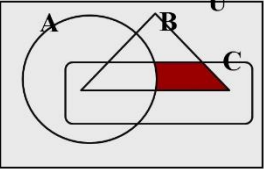
مثال: اگر  $U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$  مجموعه مرجع باشد، چند مجموعه مانند A وجود دارد که در رابطه  $\{ 2, 3, 5 \} \cap A = \{ 5 \}$  صدق کند؟

(۱) ۱۰  
(۲) ۸  
(۳) ۶  
(۴) ۴

ساده:  $A = \{ a, b, \{ a \}, \{ a, b \} \}$   
 $B = \{ a, b \}$   
مجموعه  $A - \{ B \}$  چند زیرمجموعه سره غیر تهی دارد؟

(۱) ۲  
(۲) ۷  
(۳) ۶  
(۴) ۱۴

مثال: کدام مجموعه، قسمت رنگی را توصیف می کند؟



(۱)  $(C - A) \cup B$   
(۲)  $A - (C \cap B)$   
(۳)  $C - (A - B)$   
(۴)  $(B - A) \cap C$

مثال: مجموعه های  $A = \{ 2 \}$  و  $B = \{ 3, 5, \{ 2 \} \}$  و  $C = \{ \{ \{ 2 \} \}, 3, 5, 2 \}$  مفروض اند. کدام بیان در مورد آن ها نادرست است؟ (ساده)

(۱)  $A \in B$   
(۲)  $A \in C$   
(۳)  $B \in C$   
(۴)  $A \subseteq C$

سخت:  $A = \{ 1, 2, \{ 1, 2, 3 \} \}$   
 $B = \{ 1, 2, 3, \{ 1, 2 \} \}$   
 $C = \{ 1, 2, 3 \}$

$A - B = C$   
 $B - C = \emptyset$   
 $B - C = \{ 1, 2 \}$   
 $A - B = \{ C \}$

مثال: برای دو مجموعه نامتناهی مانند A و B، کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

(۱) مجموعه  $A \cap B$  ممکن است نامتناهی باشد.  
(۲) مجموعه  $A \cup B$  لزوماً نامتناهی است.  
(۳) مجموعه  $A \cap B$  ممکن است متناهی است.  
(۴) مجموعه  $A - B$  لزوماً نامتناهی است.

مثال: اگر A مجموعه مضارب طبیعی ۳ و B مجموعه اعداد اول فرد باشند، کدام مجموعه متناهی است؟

(۱)  $B - A$   
(۲)  $A - B$   
(۳)  $A \cap B$   
(۴)  $B \cup A$

## مجموعه های متاهی و نامتاهی

**مثال:** مجموعه اعداد طبیعی مجموعه مرجع و  $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x \geq 6\}$  کدام مجموعه نامتناهی است؟  $B = \{3, 7, 8\}$

۱)  $B' \cap A$   
 ۲)  $B' - A$   
 ۳)  $A \cup B$   
 ۴)  $B - A'$

۲۴

## مجموعه مرجع

۲۳

**مثال:** کدام یک از مجموعه های زیر متناهی است؟

۱)  $\{x | x \in \mathbb{N}, x^2 > 36\}$   
 ۲)  $\{x \text{ عدد اول بزرگ تر از } 2000 | x\}$   
 ۳)  $\{x \in \mathbb{Z} | x > 10, x < 1000\}$   
 ۴)  $\{x \text{ اعداد حقیقی بین صفر و یک } | x\}$

۲۲

**سرخ ۹۵:** مجموعه A دارای ۱۴ زیر مجموعه **سره نا تهی** است. مجموعه B دارای ۸ زیر مجموعه است. مجموعه توانی  $C = A \cap (A' - B)$  چند عضو دارد؟

۱) ۴  
 ۲) ۸  
 ۳) ۱۲  
 ۴) ۱۶

۲۷

## قوانین مربوط به جبر مجموعه ها

۲۶

**مثال:** کدام گزینه همواره درست است؟

۱) اشتراک دو مجموعه نامتناهی، الزاماً مجموعه ای نامتناهی است.  
 ۲) تفاضل دو مجموعه نامتناهی، الزاماً مجموعه ای نامتناهی است.  
 ۳) اگر  $B' \subseteq A'$  و B مجموعه ای نامتناهی، آن گاه مجموعه A الزاماً نامتناهی است.  
 ۴) اگر  $B' \subseteq A'$  و  $A \cap B$  مجموعه ای نامتناهی، آن گاه مجموعه B الزاماً نامتناهی است.

۲۵

**مثال:** اگر  $n(B) = 2, n(A' \cup B') = 30, n(A) = 35, n(U) = 55$  آنگاه تعداد اعضای که حداقل در یکی از دو مجموعه A یا B قرار دارند، کدام است؟

۱) ۳۵  
 ۲) ۴۰  
 ۳) ۴۵  
 ۴) ۳۰

۳۰

**سرد ۹۷:** اگر A و B دو مجموعه غیر تهی باشند، مجموعه برابر کدام است؟  $(A \cap (A' \cup B)) \cup (B \cap (A' \cup B'))$

۱)  $A \cap B$   
 ۲)  $A \cup B$   
 ۳) B  
 ۴) A

۲۹

**مثال:** A و B دو مجموعه غیر تهی از مجموعه مرجع U هستند. متمم عبارت زیر در کدام گزینه آمده است؟  $(A \cap B) \cup (A \cap (A' \cup B'))$

۱) A  
 ۲) A'  
 ۳) U  
 ۴)  $\emptyset$

۲۸

**مثال:** با شرط  $k < -1$  حاصل  $(\frac{1}{k}, -k) \cap (k, -\frac{1}{k})$  شامل چند عدد حسابی است؟

۱) صفر  
 ۲) ۱  
 ۳) ۲  
 ۴) بی شمار

۳۳

**مثال:** برای مجموعه های زیر حاصل  $A \cap B \cap C'$  کدام است؟

$A = \{x | x \in \mathbb{R}, 2x - \frac{1}{p} \geq \frac{1}{p}\}$   
 $B = \{x | x \in \mathbb{R}, 4x - 5 < \frac{3}{p}\}$   
 $C = \{x | x \in \mathbb{W}, 4 \geq x\}$

۱)  $(\frac{1}{p}, \frac{13}{8})$   
 ۲)  $(\frac{1}{p}, \frac{13}{8}) - \{1\}$   
 ۳)  $(\frac{1}{p}, \frac{13}{8})$   
 ۴)  $(\frac{1}{p}, \frac{13}{8}) - \{1\}$

۳۲

**مثال:** اگر  $B \subseteq C \subseteq A'$  و تعداد اعضای A، B و C به ترتیب ۷، ۵ و ۱۳ باشند و  $n(U) = 35$ ، مجموعه  $(C - B) - A'$  شامل چند عضو خواهد بود.

۱) ۱۹  
 ۲) ۲۰  
 ۳) ۱۶  
 ۴) با اطلاعات داده شده قابل محاسبه نیست.

۳۱

**مثال:** اگر  $A = (-\infty, \frac{k+1}{p}]$  و  $B = [\frac{2k+4}{\Delta}, +\infty)$  باشد، به ازای چند مقدار طبیعی k مجموعه  $A \cap B$  متناهی می باشد؟

۱) صفر  
 ۲) ۲  
 ۳) ۳  
 ۴) بی شمار

۳۶

**مثال:** اگر بازه  $(a-3, 2a+3)$  یک همسایگی نقطه  $x=1$  باشد، حدود a کدام است؟

۱)  $1 < a < 4$   
 ۲)  $-\frac{1}{p} < a < 1$   
 ۳)  $-1 < a < 4$   
 ۴)  $\frac{1}{p} < a < 4$

۳۵

**مثال:** به ازای چند مقدار صحیح x، عدد x در بازه  $(3x-1, 5x+16)$  قرار دارد؟

۱) ۱۲  
 ۲) ۱۱  
 ۳) ۱۰  
 ۴) ۹

۳۴

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# پایان

۳۸

**مثال:** اگر مجموعه جواب نامعادله  $|x-2a| \geq b$  به صورت  $(-\infty, 2] \cup [5, +\infty)$  باشد، آنگاه حاصل  $a+b$  کدام است؟

۱)  $3/75$   
 ۲) ۴  
 ۳)  $2/5$   
 ۴)  $3/25$

۳۷

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- ۱ آشنایی با نماد فاکتوریل
- ۲ اصل جمع و اصل ضرب
- ۳ مفهوم ترکیب
- ۴ کیسه و مهره
- ۵ تعداد زیر مجموعه ها
- ۶ مفهوم جایگشت یا ترتیب
- ۷ جایگشت دوری
- ۸ ارتباط ترکیب با ترتیب
- ۹ تعداد اعداد
- ۱۰ شامل و فاقد یک یا چند عضو مشخص
- ۱۱ یک عضو مشخص در ابتدا ، وسط یا انتها
- ۱۲ دو یا چند عضو در کنار هم باشند (نباشند)
- ۱۳ یک یا چند عضو ، ما بین دو عضو مشخص
- ۱۴ اعضاها یک در میان قرار بگیرند
- ۱۵ مسائل تولد

آشنایی با نماد فاکتوریل

- ۶! =  
 ۵! =  
 ۴! =  
 ۳! =  
 ۲! =  
 ۱! = ۰! =

تألیفی

چه تعداد از تساوی های زیر درست است ؟

۵! - ۳! = ۱۱۴ ●      ۲! + ۴! = ۶! ●

$\frac{۶!}{۳!} = ۱۲۰$  ●      ۳! × ۲! = ۶! ●

۴(۴)      ۳(۳)      ۲(۲)      ۱(۱)

مثال

- $\frac{۸!}{۵!} =$
- $\frac{۱۲!}{۹! \times ۵!} =$
- $\frac{۶! \times ۳!}{۴! \times ۲!} =$
- $\frac{(۳!)!}{۵!} =$
- $\frac{(۰! + ۲! + ۳!)!}{۶!} =$
- $\frac{n!}{(n-۲)!} =$
- $\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۳۰$
- $n! = ۲۰ \cdot (n-۲)!$
- $(x^۲ - ۵)! = ۲۴$

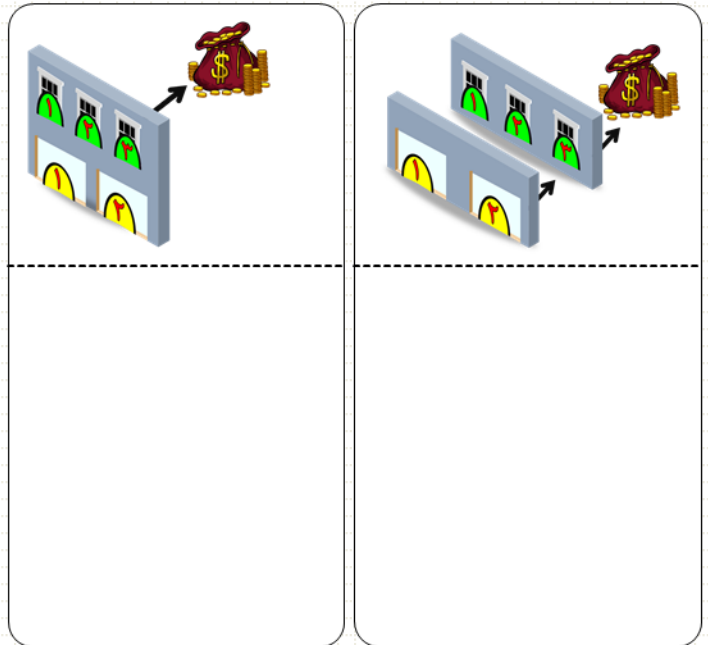
اصل جمع و اصل ضرب

به چند طریق می توان از تهران به شیراز رفت ؟



## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### اصل جمع و اصل ضرب



### مثال

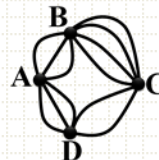
به چند طریق می توان کت و شلوار و کفش زیر، را با هم انتخاب کرد؟

- کت ۱
- کت ۲
- کت ۳
- کت ۴
- شلوار ۱
- شلوار ۲
- شلوار ۳
- کفش ۱
- کفش ۲

### مثال

مطابق شکل، میان چهار شهر A، B، C و D راه هایی وجود دارد، مشخص کنید

که به چند طریق می توان:



● از شهر A به شهر C از طریق شهر B سفر کرد؟

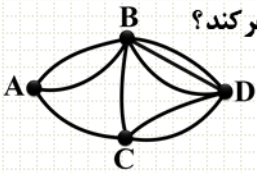
● از شهر A به شهر C سفر کرد؟

● از شهر A به شهر B سفر کرد؟

### تألیفی

میان چهار شهر A، B، C و D راه هایی به صورت زیر وجود دارد. به چند

طریق شخصی می تواند از شهر A به شهر D سفر کند؟

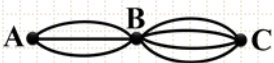


- ۱۳ (۱)
- ۱۴ (۲)
- ۱۵ (۳)
- ۱۶ (۴)

### تألیفی

شکل زیر، ارتباط بین سه شهر A، B و C را با جاده هایی که همگی دوطرفه اند،

نشان می دهد. به چند طریق می توان از شهر A به شهر C رفت و برگشت؟



- ۲۴ (۱)
- ۱۴۴ (۲)
- ۷ (۳)
- ۱۲ (۴)

### تألیفی

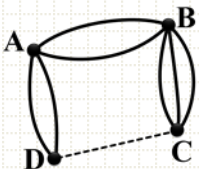
شکل زیر، ارتباط بین سه شهر A، B و C را با جاده هایی که همگی دوطرفه اند، نشان می دهد. شخصی می خواهد از شهر A به C برود و برگردد به طوری که در مسیر برگشت از هیچ یک از مسیرهایی که موقع رفتن استفاده کرده، دوباره عبور نکند، او چند انتخاب خواهد داشت؟



- ۷۲ (۱)
- ۱۴۴ (۲)
- ۳۵ (۳)
- ۱۸ (۴)

### تألیفی

بین چهار شهر A، B، C و D راه هایی به صورت زیر وجود دارد. بین دو شهر D و C چند راه وجود داشته باشد تا به ۲۴ طریق بتوان از شهر A به شهر C سفر کرد؟



- ۶ (۱)
- ۷ (۲)
- ۸ (۳)
- ۹ (۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### ○ مثال

در یک کشور نوعی اتومبیل در ۵ مدل، ۱۰ رنگ، ۳ حجم موتور مختلف و ۲ نوع دنده (اتوماتیک و غیر اتوماتیک) تولید می شود.

● چند نوع مختلف از این اتومبیل تولید می شود؟

● اگر یکی از رنگ های تولید شده مشکی باشد، چند نوع از اتومبیل با رنگ مشکی تولید می شود؟

### ○ مثال

در یک آزمون دو گزینه ای با ۱۰ سوال متفاوت، اگر دانش آموزی مجبور باشد که به همه سوال ها پاسخ دهد، چند پاسخنامه متفاوت از این دانش آموز می توانیم داشته باشیم؟

● پاسخ دادن به سوالات اختیاری است.

● چهار گزینه ای (اجباری: \_\_\_\_\_) (اختیاری: \_\_\_\_\_)

### ○ تالیفی

تعداد راه های ممکن برای پاسخ دادن به تعدادی سوال دو گزینه ای برابر  $2^{27}$  است. تعداد سوالات کدام است؟ (پاسخ دادن به سوالات اجباری نیست)

۹(۴)                      ۸(۳)                      ۷(۲)                      ۶(۱)

### مفهوم ترکیب

با اعداد ۱ ۲ ۳ ۴ چند مجموعه ۳ عضوی می توان ساخت؟

با اعداد ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸ ۹ چند مجموعه ۴ عضوی می توان ساخت؟

## ترکیبات مهم و پرکاربرد

$$\bullet \binom{5}{3} =$$

$$\bullet \binom{5}{2} =$$

$$\bullet \binom{6}{4} =$$

$$\bullet \binom{8}{5} =$$

$$\bullet \binom{6}{3} =$$

$$\binom{n}{4} = \binom{n}{5}$$

$$\binom{n}{n-1} =$$

$$\binom{4}{3} =$$

$$\binom{n}{0} =$$

$$\binom{4}{0} =$$

### ○ مثال

$$\binom{4}{2} = \binom{8}{2} =$$

$$\binom{5}{2} = \binom{9}{2} =$$

$$\binom{6}{2} = \binom{10}{2} =$$

$$\binom{7}{2} =$$

$$\binom{6}{3} =$$

$$\binom{7}{3} =$$

$$\binom{8}{3} =$$

○ مثال

●  $C(7,2) =$

●  $C(10,7) =$

●  $\binom{n}{2} = 21$

●  $\binom{n}{n-2} = 55$

●  $C(n, n-3) = 35$

○ مثال

به چند طریق می توان از بین ۶ کتاب متمایز، ۴ کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کرد؟

○ مثال

به چند طریق می توان از بین ۱۲ نفر، یک تیم ۹ نفره تشکیل داد؟

○ تألیفی

در یک کلاس تعدادی از دانش آموزان که همگی دارای شرایط علمی خوبی اند، داوطلب حضور در مسابقات علمی مدرسه اند. معلم قصد دارد ۲ نفر را به تصادف انتخاب کند، او این دو نفر را به ۲۸ روش می تواند از بین داوطلبان انتخاب کند، تعداد داوطلبان چند نفر بوده است؟

۸ (۱)      ۹ (۲)      ۱۰ (۳)      ۱۱ (۴)

○ تألیفی

از بین ۵ دانش آموز انسانی و ۴ دانش آموز تجربی می خواهیم یک تیم ۴ نفره تشکیل دهیم. در چند حالت تعداد مساوی از هر دو رشته در تیم موجود است؟

۴۰ (۱)      ۱۴ (۲)      ۶۰ (۳)      ۷۲ (۴)

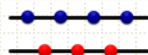
○ تألیفی

از ۱۰ کتاب ادبی و ۸ کتاب ریاضی متفاوت چند دسته ۵ تایی متشکل از ۲ کتاب ادبی و ۳ کتاب ریاضی می توان تشکیل داد؟

۲۴۱۰ (۱)      ۲۵۲۰ (۲)      ۲۵۴۰ (۳)      ۲۴۲۰ (۴)

○ مثال

با نقاط شکل



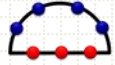
● چند مثلث می توان درست کرد؟

● چند چند چهارضلعی می توان درست کرد؟

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ مثال

با نقاط شکل چند مثلث می توان ساخت؟



○ خ انسانی ۹۳

به چند طریق می توان ۶ کارمند جدید را در اتاق های ۳ نفره، ۲ نفره و ۱ نفره جای داد؟

○ تألیفی

در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توان از این کیسه سه مهره به تصادف انتخاب کرد به طوری که رنگ مهره های خارج شده، دو به دو متفاوت باشد؟

○ تألیفی

۷۲(۴)      ۶۰(۳)      ۵۴(۲)      ۴۵(۱)

در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره قرمز و ۳ مهره آبی وجود دارد. به چند طریق می توان از این کیسه سه مهره به تصادف انتخاب کرد به طوری که یک مهره آبی باشد؟

○ انسانی ۹۳

۷۲(۴)      ۶۰(۳)      ۵۴(۲)      ۴۵(۱)

به چند طریق می توان ۶ عدد اسباب بازی متمایز را بین سه بچه با تعداد یکسان تقسیم کرد؟

○ مثال



به چند طریق می توان سه مهره به تصادف از ظرف خارج کرد؟

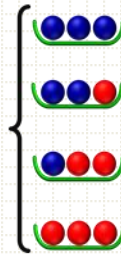
● به طوری که حداقل یک مهره آبی باشد.

○ حداکثر یک مهره آبی باشد.

کیسه و مهره



به چند طریق می توان ۳ مهره به تصادف از کیسه خارج کرد؟



به طوری که:

● دو مهره قرمز و یک مهره آبی

● مهره ها هم رنگ

● فقط دو مهره هم رنگ

● حداقل یک مهره قرمز

● حداکثر یک مهره قرمز

● حداقل دو مهره هم رنگ

● حداقل دو مهره قرمز

تعداد زیر مجموعه ها

○ مثال

در مجموعه  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، تعداد:

- کل زیر مجموعه های  $A$ ؟
- زیر مجموعه حداکثر ۲ عضوی؟
- زیر مجموعه حداقل ۱ عضوی؟

$$A = \{a, b, c\}$$

تعداد کل زیر مجموعه ها:  $\{\quad, \quad, \quad\}$

زیر مجموعه صفر عضوی:

زیر مجموعه یک عضوی:

زیر مجموعه دو عضوی:

زیر مجموعه سه عضوی:

نتیجه:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} =$$

○ مثال

مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  مفروض است.

- تعداد زیر مجموعه های  $A$ ؟
- تعداد زیر مجموعه های  $A$  (شامل عضو ۲)؟
- تعداد زیر مجموعه های  $A$  (فاقد عضو ۲)؟
- تعداد زیر مجموعه های  $A$  (شامل ۲ و فاقد ۵)؟
- تعداد زیر مجموعه های  $A$  (فاقد ۲ و ۵)؟

● مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  چند زیر مجموعه (فرد / زوج) عضوی دارد؟

● مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  چند زیر مجموعه (فرد/زوج) عضوی دارد؟

یک مجموعه  $n$  عضوی؛

..... مجموعه (فرد/زوج) عضوی دارد.

○ مثال

با مجموعه  $A = \{t, e, h, r, a, n\}$  چند:

● زیر مجموعه (شامل  $a$ )؟

● زیر مجموعه ۵ عضوی (شامل  $a$ )؟

● زیر مجموعه (فاقد  $h$ )؟

● زیر مجموعه ۴ عضوی (فاقد  $h$ )؟

● زیر مجموعه (ش  $a$  و ف  $h$ )؟

● زیر مجموعه ۴ عضوی (ش  $a$  و ف  $h$ )؟

○ مثال

با مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$  چند:

● زیر مجموعه ۲ عضوی؟

● زیر مجموعه ۲ عضوی یا ۳ عضوی؟

● زیر مجموعه حداقل ۲ عضوی؟



## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### ○ تألیفی

تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی یک مجموعه، با تعداد زیر مجموعه های ۶ عضوی آن برابر است. تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی این مجموعه کدام است؟

۴۵(۱)

۶۶(۲)

۵۵(۳)

۳۶(۴)

### ○ تألیفی

اگر تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی یک مجموعه  $n$  عضو با تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی آن برابر باشد، حاصل  $C(n, 3)$  کدام است؟

۳۶(۱)

۲۰(۲)

۷۲(۳)

۴۸(۴)

### ○ تألیفی

یک مجموعه  $n$  عضوی ۶ زیر مجموعه دو عضوی دارد.  $n$  کدام است؟

۴(۱)

۶(۲)

۸(۳)

۵(۴)

### ○ مثال

از بین ۷ نفر که سیما و زهرا و مریم نیز بین آن ها است به چند طریق می توان یک تیم ۴ نفره تشکیل داد که:

● سیما عضو تیم باشد.

● سیما و زهرا و مریم حتما عضو تیم باشند.

● سیما عضو تیم نباشد.

● سیما عضو باشد ولی مریم و زهرا نباشند.

### ○ انسانی ۸۰

از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می توان سه نفر را طوری انتخاب کرد، که همواره یک فرد مورد نظر بین آن سه نفر باشد؟

۴۵(۱)

۵۵(۲)

۶۶(۳)

۷۲(۴)

### ○ مثال

از بین ۵ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب می کنیم و یک تیم ۶ نفره والیبال تشکیل می دهیم. به چند طریق می توان این تیم را تشکیل داد، هرگاه:

● فقط ۲ نفر از اعضای تیم از پایه یازدهم باشند.

● کاپیتان تیم، فرد مشخصی از پایه دوازدهم باشند.

### ○ تألیفی

در یک مسابقه کشتی، ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی، شرکت کرده اند. در چند حالت کمیته ۴ نفره با حداقل ۱ داور ایرانی خواهیم داشت؟

۱۲۰(۱)

۱۲۱(۲)

۱۲۲(۳)

۱۲۴(۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ تألیفی

از بین ۳ دانش آموز پایه یازدهم و ۶ دانش آموز پایه دوازدهم افرادی را انتخاب می‌کنیم و یک تیم ۵ نفره والیبال تشکیل می‌دهیم. به چند طریق می‌توان این تیم را تشکیل داد به طوری که حداقل ۳ نفر از اعضای تیم، پایه دوازدهم باشند؟

۱۱۱(۱)      ۱۷۱(۲)      ۱۶۱(۳)      ۱۵۱(۴)

○ مثال

از بین ۲ مدرس ریاضی، ۳ مدرس معارف و ۴ مدرس زبان قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به طوری که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای این کار وجود دارد؟

روش دوم:

○ مثال

یک آشپز، ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه‌ها یک طعم مخصوص درست می‌کند.

● این آشپز چند طعم می‌تواند درست کند؟

● به طوری که از ۲ نوع ادویه مشخص با هم استفاده نشود؟

● به طوری که ۳ نوع ادویه مشخص، هر سه با هم نباشند؟

○ مثال

از هر یک از شهرهای تهران، شیراز، اصفهان ۷ دانش آموز به اردوی دانش آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش آموز غیر هم شهری انتخاب کرد؟

○ مثال

به چند طریق دو دانش آموز غیر هم شهری می‌توان انتخاب کرد؟

A ۷	B ۶	C ۵
	A ۷	A ۷

○ مثال

از هر یک از شهرهای تهران، شیراز، اصفهان، مشهد ۷ دانش آموز به اردوی دانش آموزی دعوت شده‌اند. به چند طریق می‌توان سه دانش آموز غیر هم شهری انتخاب کرد؟

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### ○ تجربی ۹۲

از هر یک از مدارس A، B، C، D و E چهار نفر به اردوگاه دانش آموزی دعوت شده اند. به چند طریق می توان سه دانش آموز که دو به دو غیر هم مدرسه ای باشند، انتخاب کرد؟

۱۶۰(۱)      ۳۲۰(۲)      ۶۴۰(۳)      ۴۸۰(۴)

### ○ ریاضی ۹۲

از هر یک از ۶ منطقه کشوری، ۱۵ دانش آموز به یک اردوگاه فرهنگی دعوت شده اند. به چند طریق می توان ۳ دانش آموز از بین آن ها که دو به دو غیر هم منطقه ای اند، انتخاب کرد؟

۵۷۶۰۰(۱)      ۶۷۵۰۰(۲)      ۷۵۶۰۰(۳)      ۷۶۵۰۰(۴)

### مفهوم جایگشت یا ترتیب

a, b ○ ○	a, b, c ○ ○ ○
جایگشت n شیء متمایز برابر ..... است.	
۹ کتاب متمایز	watch
BARAN	assist
NAZANIN	

### ○ مثال

به چند طریق می توان ۵ کتاب را در یک قفسه کنار هم چید؟

### ○ مثال

به چند طریق می توان ۱۰ نفر را در یک ردیف کنار هم قرار داد؟

### ○ تالیفی

با حروف کلمه «انسانی» چند کلمه ۶ حرفی متمایز می توان نوشت؟

۱۸۰(۱)      ۷۲۰(۲)      ۲۴۰(۳)      ۳۶۰(۴)

### ○ مثال

به چند طریق ۵ نفر می توانند روی:

● ۶ صندلی بنشینند؟

● ۷ صندلی بنشینند؟

● ۸ صندلی بنشینند؟

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### جایگشت دوری



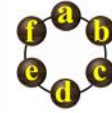
این شش حالت مثل هم اند و یک حالت محسوب می شوند.

مثال ○

به چند طریق می توان ۶ نفر را :

a b c d e f

● در یک ردیف چید؟



● دور یک میز گرد نشاند؟

تعداد حالات چیدمان n شیء  
متمايز دور یک میز

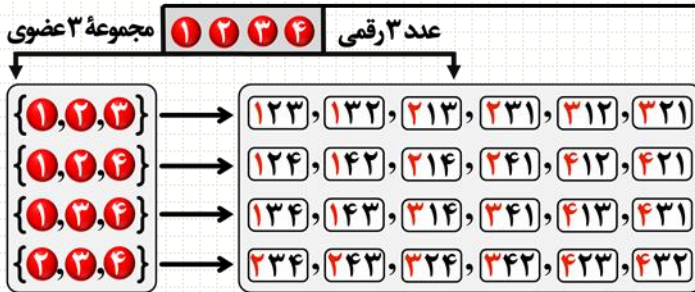
مثال ○

به چند طریق می توان ۵ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟

مثال ○

به چند طریق می توان ۱۰ نفر را دور یک میز گرد نشاند؟

### ارتباط ترکیب با ترتیب



مثال ○

$$C(7, 2) =$$

$$C(10, 4) =$$

$$C(n, 3) =$$

$$P(7, 2) =$$

$$P(10, 4) =$$

$$P(n, 3) =$$

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ مثال

با حروف a, b, c, d چند:

● کلمه ۲ حرفی بدون تکرار حروف؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

● کلمه ۳ حرفی بدون تکرار حروف؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

○ مثال

بالرقام ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ چند عدد ۴ رقمی بدون تکرار می توان نوشت؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

○ مثال

به چند طریق می توان از بین ۹ کتاب متمایز، ۴ کتاب را در یک قفسه در کنار هم چید؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

○ مثال

از ۱۲ نفر دانش آموز نمونه، به چند طریق می توان ۳ نفر را جهت مشارکت در سه مورد متمایز در امور مدرسه، انتخاب کرد؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

○ تألیفی

یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشتی انجام می شود. اگر همه ی تیم ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟

بردار و بچین	منبع بیا پایین

۴۵(۱)      ۹۰(۲)      ۱۸۰(۳)      ۳۶۰(۴)

○ تألیفی

اگر  $P(n, 3) = 120$ ، حاصل  $(n-1)!$  کدام است؟

۱۰۰(۱)      ۱۲۰(۲)      ۳۶۰(۳)      ۱۸۰(۴)

○ انسانی ۸۴

اگر  $C(n, 4) = P(n-1, 3)$ ،  $n$  کدام است؟

۲۳(۱)      ۲۴(۲)      ۲۴(۳)      ۴۳(۴)

○ تألیفی

اگر از بین ۴ نفر، ۲ نفر آنان مجاز به رانندگی باشند، به چند طریق می توانند در یک اتومبیل سواری قرار بگیرند؟

۱۲(۱)      ۱۴(۲)      ۱۶(۳)      ۱۸(۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ تالیفی

در یک آنومبیل معمولی، ۵ نفر به چند طریق می توانند بنشینند، به طوری که ۳ نفر آن ها، مجاز به رانندگی باشند؟

۶۰(۱)      ۷۲(۲)      ۷۵(۳)      ۸۴(۴)

تعداد اعداد (مامان و یکی کمتر، نامش مُش)

چند عدد

● ۳ رقمی بدون تکرار  
بارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶

● ۳ رقمی با تکرار  
بارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶

○ مثال

چند عدد

● ۳ رقمی زوج بدون تکرار  
بارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶

● ۳ رقمی زوج با تکرار  
بارقام ۱, ۲, ۳, ۵, ۶

○ خ انسانی ۹۸

بارقام موجود در مجموعه  $\{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$ ، چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم ها، می توان نوشت؟

۱۲۰(۱)      ۱۸۰(۲)      ۲۴۰(۳)      ۳۰۰(۴)

○ تجربی ۹۰

چند عدد چهار رقمی متمایز بارقام فرد که بزرگ تر از ۳۰۰۰ هستند، وجود دارد؟

۷۲(۱)      ۸۴(۲)      ۹۶(۳)      ۱۰۸(۴)

○ مثال

چند عدد ۳ رقمی متمایز زوج بارقام زیر می توان نوشت که صدگانش عدد اول باشد.

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۸

چند عدد

● ۳ رقمی متمایز کوچکتر از ۴۰۰

● ۳ رقمی متمایز بزرگتر از ۳۰۰

درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ مثال

چند عدد ۴ رقمی متمایز فرد با ارقام زیر می توان نوشت که بزرگتر از ۲۰۰۰ و کوچکتر از ۵۰۰۰ باشد؟  
۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵

○ مثال

با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی متمایز مضرب ۵ می توان نوشت؟

○ انسانی ۹۸

با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و ۶ چند عدد ۴ رقمی بخش پذیر بر ۵ بدون تکرار رقم ها، می توان نوشت؟

○ مثال

با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵ و ۶ چند عدد سه رقمی متمایز زوج می توان نوشت؟

○ مثال

با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ و ۹ چند عدد ۳ رقمی زوج متمایز و کوچک تر از ۵۰۰؟

○ مثال

با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸ و ۹ چند عدد ۳ رقمی متمایز مضرب ۵ و بزرگ تر از ۶۰۰؟

یک عضو مشخص در ابتدا، وسط یا انتها

با حروف a, b, c, d, e تعداد:

● کلمات ۴ ح (شروع با a)

● کلمات ۵ ح (e در وسط)

● کلمات ۴ ح (a در ابتدا و e در انتها)

● کلمات ۵ ح (a و e در ابتدا یا انتها)

○ انسانی ۹۱

حروف کلمه EARNEST را به چند طریق می توان در کنار هم قرار داد به طوری که حرف N همواره در وسط قرار گیرد؟

۱۸۰(۱)      ۲۱۶(۲)      ۲۴۰(۳)      ۳۶۰(۴)

○ خ انسانی ۸۹

تعداد جایگشت های حروف کلمه DADRASS که در آن حرف R همواره در وسط قرار بگیرد؟

۴۵(۱)      ۷۵(۲)      ۹۰(۳)      ۱۲۰(۴)

○ تألیفی

با حروف کلمه «جمهوری» چند کلمه ۳ حرفی بدون تکرار حروف می توان ساخت به طوری که حرف اول آن نقطه دار نباشد؟

۱۰۰(۱)      ۱۲۰(۲)      ۶۰(۳)      ۸۰(۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### ○ تألیفی

۶ نفر که دو نفر آن‌ها برادر هستند، در یک ردیف می‌ایستند. تعداد حالاتی که دو برادر در اول و آخر صف قرار نگیرند، کدام است؟

۶۷۰(۱)

۶۷۱(۲)

۶۷۲(۳)

۶۷۴(۴)

### شامل و فاقد یک یا چند عضو مشخص

با حروف  $t, e, h, r, a, n$  چند:

● کلمه ۵ حرفی بی تکرار (شامل  $a$ )

● کلمه ۴ حرفی بی تکرار (شامل  $a$  و  $e$ )

● کلمه ۴ حرفی بی تکرار فاقد  $h$

● کلمه ۴ حرفی بی تکرار (شامل  $a$  و  $h$ )

### ○ انسانی ۹۷

با حروف کلمه DANESH چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان نوشت به طوری که حرف S در هر رمز باشد؟

۲۴۰(۱)

۲۵۰(۲)

۲۶۰(۳)

۲۷۰(۴)

### ○ انسانی ۹۲

پنج حرف از ۸ حرف کلمه BUSINESS را با جایگشت‌های متمایز در کنار هم قرار می‌دهیم. تعداد گروه‌هایی که هر سه S در آن‌ها موجود باشد، کدام است؟

۱۵۰(۱)

۱۶۰(۲)

۲۰۰(۳)

۲۴۰(۴)

### دو یا چند عضو در کنار هم باشند (نباشند)

با حروف کلمه  $comput$ :

● تعداد کلمه ۵ حرفی بی تکرار که  $m$  و  $u$  کنار همند.

● تعداد کلمه ۴ حرفی بی تکرار که  $m$  و  $u$  کنار همند.

### ○ مثال

با حروف کلمه  $ASSIST$ :

● تعداد کلمه ۶ حرفی بی تکرار که حروف یکسان کنار هم

● تعداد کلمه ۶ حرفی بی تکرار که حروف غیر یکسان کنار هم

### ○ تألیفی

۳ کتاب ریاضی متمایز و ۲ کتاب اقتصاد متمایز را به چند طریق می‌توان در یک قفسه در کنار هم قرار داد به طوری که کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند؟

۲۴(۱)

۴۸(۲)

۳۶(۳)

۸۴(۴)



## درس ۱: شمارش بدون شمارش

### ○ تألیفی

۵ نفر که ۳ نفر از آن‌ها با هم برادرند، به تصادف در یک ردیف می‌ایستند. در چند حالت هر سه برادر کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۲۴(۱)      ۴۸(۲)      ۳۶(۳)      ۸۴(۴)

### ○ انسانی ۸۴

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه DAMDARAN به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار گیرند، کدام است؟

- ۱۲۰(۱)      ۱۸۰(۲)      ۲۴۰(۳)      ۳۶۰(۴)

### ○ تجربی ۸۴

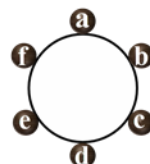
حروف کلمه LAGRANGE را با جایگشت‌های مختلف کنار هم قرار می‌دهیم. در چند حالت حروف یکسان کنار هم قرار می‌گیرند؟

- ۳۶۰(۱)      ۵۴۰(۲)      ۷۲۰(۳)      ۱۴۴۰(۴)

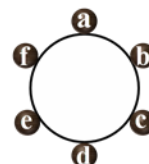
### ○ مثال

به چند طریق می‌توان ۶ نفر به نام‌های  $a, b, c, d, e, f$  را دور یک میز گرد نشاند به طوری که:

●  $a, b, c$  و  $c$  کنار هم باشند.



●  $a$  و  $b$  کنار هم باشند.

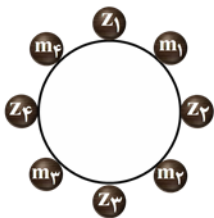


### ○ انسانی ۹۹

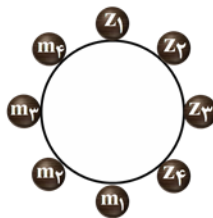
### ○ مثال

چهار زوج زن و شوهر به چند طریق می‌توانند دور یک میزگرد بنشینند به طوری که:

● هر زوجی کنار هم باشند.



● زن‌ها کنار هم و مرد‌ها کنار هم



### ○ تألیفی

۴ توپ متمایز سبز و ۳ توپ متمایز قرمز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به طوری که هیچ دو توپ قرمزی کنار هم نباشند؟

- ۱۲۰۰(۱)      ۱۴۴۰(۲)      ۷۲۰(۳)      ۲۴۰۰(۴)

### ○ خ تجربی ۹۲

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند کدام است؟

- ۱۸۰(۱)      ۲۱۶(۲)      ۲۴۰(۳)      ۳۶۰(۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ مثال

با حروف کلمه **comput** چند:

● کلمه ۵ حرفی بی تکرار که **m** و **u** کنار هم نه

● کلمه ۴ حرفی بی تکرار که **m** و **u** کنار هم نه

یک یا چند عضو ، ما بین دو عضو مشخص

با حروف **a, b, c, d, e, f** چند:

● کلمه ۶ ح که فقط یک حرف بین **a** و **c** قرار بگیرد.

● کلمه ۶ ح که فقط **b** بین **a** و **c** قرار بگیرد.

○ ریاضی ۸۷

پنج نفر به نام های **a, b, c, d, e** قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. ترتیب سخنرانی این افراد به چند طریق ممکن است اگر بین **a** و **b** فقط یک نفر سخنرانی کند؟

○ تالیفی

تعداد جایگشت های کلمه **SYSTEM** که در آن هایین دو حرف **S**، دو حرف دیگر وجود داشته باشد؟

۱۹۲(۱)      ۱۸۰(۲)      ۷۲(۳)      ۶۰(۴)

○ تالیفی

با حروف کلمه «عدالت» چند کلمه ۵ حرفی بدون توجه به معنی می توان نوشت به طوری که بین حرف (ع) و (د) دقیقاً یک حرف قرار بگیرد و حرف (ل) آخرین حرف کلمه باشد؟

۴(۱)      ۸(۲)      ۱۲(۳)      ۱۶(۴)

عضوها یک در میان قرار بگیرند



○ تالیفی

۳ کتاب متمایز علمی و ۴ کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به طوری که کتاب های ادبی یک در میان قرار بگیرند؟

۲۴(۱)      ۳۶(۲)      ۵۴(۳)      ۶۰(۴)      ۱۴۴(۱)      ۲۸۸(۲)      ۳۶(۳)      ۲۴(۴)

## درس ۱: شمارش بدون شمارش

○ تألیفی

حروف کلمه ASSIST را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می توان کنار هم قرار داد، به طوری که S ها یک در میان باشند؟

۸(۱)                      ۹(۲)                      ۱۰(۳)                      ۱۲(۴)

○ تألیفی

باجابه جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش رقمی می توان ساخت به طوری که رقم های ۲ یک در میان باشند؟

۸(۱)                      ۹(۲)                      ۱۰(۳)                      ۱۲(۴)

○ تألیفی

حروف کلمه ASSISTAN را با چند حالت و بدون توجه به مفهوم کلمه می توان کنار هم قرار داد به طوری که S ها یک در میان باشند؟

۲۴۰(۱)                      ۴۸۰(۲)                      ۱۲۰(۳)                      ۱۸۰(۴)

○ تألیفی

۴ مرد و ۴ زن را به چند طریق می توان دور یک میز قرار داد: به طوری که یک در میان کنار هم باشند؟

۱۲۰(۱)                      ۱۴۴(۲)                      ۷۲(۳)                      ۲۴۰(۴)

## مسائل تولد

۳ نفر به نام های a، b، c در یک مهمانی حضور دارند، در چند حالت:   
● تولد هر ۳ نفر در روزهای متفاوت هفته

● فقط تولد a و b در یک روز هفته

● فقط تولد ۲ نفر در یک روز هفته

● فقط تولد a و b در روز شنبه

○ مثال

۳ نفر به نام های a، b، c در یک مهمانی حضور دارند، در چند حالت:   
● تولد هر ۳ نفر در فصل های متفاوت سال

● فقط تولد a و b در یک فصل سال

● فقط تولد ۲ نفر در یک فصل سال

● فقط تولد a و b در فصل بهار

○ مثال

۳ نفر به نام های a، b، c در یک مهمانی حضور دارند، در چند حالت:   
● تولد هر ۳ نفر در ماه های متفاوت سال

● فقط تولد a و b در یک ماه سال

● فقط تولد ۲ نفر در یک ماه سال

● فقط تولد a و b در ماه دی

شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)

جایگشت

چند شیء کنار هم باشند یا نباشند. (جعبه)

جایگشت یک در میان

تقدم و تاخر

انتخاب، انتخاب و چینش

زیر مجموعه

۳۸

a, b, c

جایگشت:

abc bac cab  
acb bca cba

n شیء متمایز  
n!

$3 \times 2 \times 1 = 3!$

۵, ۷, ۲, ۳	watch	گل پیرا	۹ کتاب متمایز	$\alpha, \beta, \theta, \gamma$
۲, ۳, ۷, ۰	۹ مهره یکسان	assist	احسان	ده نفر

۳۹

به چند حالت مختلف می توان چهار عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را کنار هم قرار داد؟

تعداد روش های چینن پنج حرف یونانی  $\theta, \delta, \gamma, \beta, \alpha$  کنار هم و بدون تکرار، یا به عبارتی تعداد جایگشت های پنج شیء متمایز چند تاست؟

تعداد کلمات هفت حرفی (با معنی و بدون معنی) که از کنار هم قرار دادن حروف «ت»، «ش»، «و»، «ا»، «ن»، «پ» و «ه» می توان ساخت چند تاست؟ (بدون تکرار حروف)

۴۰

با استفاده از ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ چند عدد نه رقمی با ارقام متمایز می توان نوشت؟

تعداد جایگشت های ده شیء متمایز چند تاست؟

با حروف کلمه picture چند کلمه ۷ حرفی می توان ساخت؟

اگر n یک عدد طبیعی باشد، تعداد جایگشت های n شیء متمایز را با یک حاصلضرب نشان دهید

۴۱

۴ توپ قرمز و ۳ توپ آبی متمایز را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم قرار داد؟

۴ توپ قرمز و ۳ توپ آبی را به چند طریق می توان در یک ردیف کنار هم قرار داد به طوری که توپ های هم رنگ یکسان باشند؟

حروف کلمه ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می دهیم. در چند حالت حرف X در آخر کلمات قرار می گیرد؟

۴۲

**مثال:** با کنار هم قرار دادن ارقام ۵, ۶, ۶, ۲, ۲, ۲ چند عدد شش رقمی فرد می توان ساخت؟

۱۶ (۴)      ۱۰ (۳)      ۱۲ (۲)      ۱۴ (۱)

۴۳

**مثال:** ۳ دانش آموز سال اول و ۴ دانش آموز سال دوم به تصادف در یک ردیف قرار می گیرند. تعداد حالاتی که نفر وسط، دانش آموز سال اول باشد، چقدر است؟

۱۱۶۰ (۴)      ۱۴۴۰ (۳)      ۷۲۰ (۲)      ۲۱۶۰ (۱)

۴۴

**مثال:** با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» چهار حرف اول باشند؟

۴×۵! (۴)      ۴! (۳)      ۴×۴! (۲)      ۴!×۵! (۱)

ج ا ن گ ر ی  
ه ر ی

۴۵

شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)

جایگشت

چند شیء کنار هم باشند یا نباشند. (جعبه)

جایگشت یک درمیان

تقدم و تاخر

انتخاب، انتخاب و چینش

زیر مجموعه

۴۶

**مثال:** با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۴ حرفی می توان نوشت که در آن دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

۴×۵! (۱)      ۳×۵! (۲)      ۳×۴! (۳)      ۴×۴! (۴)

گ ل ا  
پ ر ی

۴۷

**مثال:** با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «پیرا» کنار هم آمده باشند؟

۴×۵! (۱)      ۳×۵! (۲)      ۳×۴! (۳)      ۴×۴! (۴)

گ ل ا  
پ ر ی

۴۸

**مثال:** با حروف کلمه «گل پیرا» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که در آن دو حرف «پ» و «ر» در کنار هم آمده باشند؟

۲×۴! (۱)      ۲×۵! (۲)      ۳×۴! (۳)      ۳×۵! (۴)

گ ل ا  
پ ر ی

۴۹

**مثال:** ۵ دانش آموز دهم و ۴ دانش آموز دوازدهم به چند طریق می توانند کنار هم باشند به طوری که

○ جای آن ها مهم نباشد؟

○ دوازدهمی ها کنار هم باشند؟

○ دهمی ها کنار هم و دوازدهمی ها کنار هم باشند؟

۵۰

**مثال:** با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که در آنها حروف کلمه «جهان» کنار هم باشند؟

۴×۶! (۱)      ۳×۶! (۲)      ۴×۷! (۳)      ۳×۷! (۴)

ج ا ن گ ر ی  
ه ر ی

۵۱

**مثال:** با حروف کلمه «خوشه چین» تعداد جایگشت ها با کدام شرط از همه کم تر است؟

(۱) حروف کلمه «خوش» کنار هم باشند.

(۲) حروف خ، و، ش به صورت «خوش» باشند.

(۳) به «خوش» ختم شود.

(۴) حروف نقطه دار در شروع و «ه» در پایان باشد.

۵۲

**مثال:** ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده ایم که همواره رقم های فرد کنار هم باشند، تعداد پنج رقمی های حاصل کدام است؟

۴۰ (۴)      ۳۸ (۳)      ۳۶ (۲)      ۳۲ (۱)

۵۳

**مثال:** با حروف کلمه computer چند کلمه ۸ حرفی می توان ساخت که در آن کلمه put باشد؟

۱۴۴۰ (۴)      ۷۲۰ (۳)      ۵۴۰ (۲)      ۳۶۰ (۱)

t o c  
e r m p  
u

۵۴

**مثال:** به چند طریق می توان ۴ کتاب متفاوت فیزیک و ۳ کتاب متفاوت ریاضی و ۵ کتاب متفاوت شیمی را در یک قفسه کنار هم چید به طوری که کتاب های فیزیک کنار هم و کتاب های ریاضی کنار هم باشند.

۴×۹! (۴)      ۴×۸! (۳)      ۲×۹! (۲)      ۳×۸! (۱)

۵۵

**مثال:** به چند طریق می توان ۴ کتاب متفاوت فیزیک و ۳ کتاب متفاوت ریاضی و ۵ کتاب متفاوت شیمی را در یک قفسه کنار هم چید به طوری که کتاب های هم موضوع کنار هم باشند.

۳/۵×۸! (۴)      ۲/۷×۹! (۳)      ۲/۵×۹! (۲)      ۲/۷×۸! (۱)

۵۶

**مثال:** به چند طریق می توان ۳ کتاب ادبی متفاوت و ۴ کتاب ریاضی مختلف و ۲ کتاب فیزیک متمایز را کنار هم قرار داد به طوری که کتاب های ادبی همواره کنار هم بوده و کتاب های فیزیک در طرفین کتاب های ادبی قرار داشته باشند؟

۴×۹! (۴)      ۴×۸! (۳)      ۲×۶! (۲)      ۳×۶! (۱)

۵۷

**مثال:** حروف کلمه minimum را با جایگشت های متفاوت کنار هم قرار داده ایم، تعداد حالاتی که حروف یکسان کنار هم قرار می گیرند، کدام است؟

۷۲ (۴)      ۲۴ (۳)      ۲۸۸ (۲)      ۱۲۰ (۱)

۵۸

شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)

جایگشت

چند شیء کنار هم باشند یا نباشند. (جعبه)

جایگشت یک درمیان

تقدم و تاخر

انتخاب، انتخاب و چینش

زیر مجموعه

۵۹

متحرک      ثابت

۱ ۲ ۳ ۴      ۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۶۰

**الگو:** مهره های زیر را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد بطوری که فقط قرمزها یک در میان باشند؟

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۱ ۲ ۳ ۴ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

۶۱

**مثال:** ۸ کتاب ادبیات متمایز و ۳ کتاب زیست شناسی متمایز را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم قرار داد بطوری که کتاب های زیست شناسی همواره یک در میان باشند؟

۶۲

**مثال:** به چند طریق می توان با ۷ دانش آموز سال دهم و ۴ دانش آموز سال یازدهم، یک صف ایجاد کرد طوری که دانش آموزان سال یازدهم یکی در میان قرار گیرند؟

۶۳

**مثال:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد ۷ رقمی می توان نوشت به طوری که **ارقام زوج و فرد** یک در میان باشند؟

**مثال:** با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ چند عدد هفت رقمی می توان نوشت به طوری که **فقط ارقام زوج** یک در میان باشند؟

**مثال:** حروف کلمه **ASSISTAN** را با چند حالت و بدون توجه به مفهوم کلمه می توان کنار هم قرار داد بطوری که **S ها** یک در میان باشند؟

**مثال:** با جابه جایی ارقام عدد **۵۷۶۲۲۲** چند عدد شش رقمی می توان ساخت به طوری که **رقم های ۲** یک در میان باشند؟

**مثال:** با حروف کلمه **computer** چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که **C** را نداشته باشد و حروف صدادار و بی صدا یکی در میان باشد؟

**مثال:** ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۳ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان یک در میان از هر نوع، در یک قفسه کنار هم چید؟

**مثال:** ۵ دانش آموز دهم و ۴ دانش آموز دوازدهم به چند طریق می توانند کنار هم باشند به طوری که:

- یکی در میان قرار بگیرند؟
- دوازدهمی یک در میان باشند؟

**مثال:** با حروف **a, b, c, d, e, f** چند کلمه ۶ حرفی می توان ساخت که: **a, b, c** کنار هم باشند. فقط **b** بین **a** و **c** قرار بگیرد؟ **a** سپس **b** سپس **c** بیاید؟ **c** بعد **b** و **b** بعد **a** قرار گیرد؟ **c** بعد **b** و **d** بعد **a** قرار گیرد؟ **b** بین **a** و **c** قرار بگیرد؟

**شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)**  
جایگشت  
چند شیء کنار هم باشند یا نباشند. (جعبه)  
جایگشت یک در میان  
تقدم و تاخر  
انتخاب، انتخاب و پیش  
زیر مجموعه

**مثال:** ۴ کتاب ریاضی متمایز و ۴ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می توان یک در میان از هر نوع در یک قفسه کنار هم چید؟

$(1) 2 \times (4!)^2$     $(2) 3 \times (4!)^2$     $(3) 8 \times 4!$     $(4) 6 \times 4!$

# ترتیب و ترکیب

**شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)**  
جایگشت  
چند شیء کنار هم باشند یا نباشند. (جعبه)  
جایگشت یک در میان  
تقدم و تاخر  
انتخاب، انتخاب و پیش  
زیر مجموعه

**مثال:** مهران، رضا، محسن و سه نفر دیگر در صف ورود به قطار هستند. تعداد جایگشت های این شش نفر در کدام حالت از بقیه بیشتر است؟  
(۱) مهران قبل از رضا باشد.  
(۲) مهران قبل از رضا و بعد از محسن باشد.  
(۳) محسن نفر چهارم باشد.  
(۴) مهران نفر اول نباشد.

- (۵)
- (۳)
- (۷)
- (۴)
- (۱۳)
- (۱۱)

$C(7, 2) =$   
 $P(7, 2) =$   
 $P(10, 7) =$

**مثال:** تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی مجموعه  $A = \{a, b, c, d\}$ ؟  
**ترکیب:**  $\{a, b\} \{a, c\} \{a, d\}$   
 $\{b, c\} \{b, d\} \{c, d\}$   
**ترتیب:**  $(a, b) (a, c) (a, d)$   
 $(b, a) (c, a) (d, a)$   
 $(b, c) (b, d) (c, d)$   
 $(c, b) (d, b) (d, c)$   
مثال: تعداد زوج مرتب ها با مجموعه A؟

تعداد انتخاب یک تیم ۲ نفره از بین ۵ نفر.  $C(5, 2) = 10$   
تعداد انتخاب ۳ سوال از بین ۵ سوال.  $C(5, 3) = 10$   
تعداد **مثلث های** که از ۵ نقطه متمایز روی دایره می توان ساخت.  
تعداد **پاره خط های** که از ۵ نقطه متمایز روی دایره می توان ساخت.  
تعداد انتخاب تصادفی ۲ مهره از ظرفی شامل ۲ مهره آبی و ۳ مهره قرمز.  
تعداد **زوایای** حاده ای که از نیم خط های شکل روبرو می توان ساخت.  
تعداد انتخاب تصادفی ۲ دفتر از میان ۳ تجربی و ۲ ریاضی و:  $C(5, 2) \times 2! = 5 \times 4 = 20$   
• فرستادن آن ها به دو سمینار متفاوت درسی  
• تشکیل یک کمیته علمی شامل رئیس و معاون

**مثال:** حاصل را بیابید.  
 $P(10, 3) =$   
 $C(8, 3) =$   
 $P(n-1, 3) =$   
 $C(12, 9) =$   
 $P(12, 9) =$

**مثال:** مقدار  $n$  را در تساوی زیر بیابید.  
$$\binom{19}{2n} = \binom{19}{n+1}$$

**مثال:** مقدار  $n$  را در تساوی های زیر بیابید.  
 $C(n, 2) + P(n, 1) = 15$   
 $C(n, n-4) = P(n-1, 3)$

**ترکیب (انتخاب)**  
 $\binom{n}{r} = C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$     $\binom{5}{3} =$   
**ترتیب (انتخاب و پیش)**  
 $\binom{n}{r} \times r! = (n)_r$     $\binom{5}{3} =$   
 $(n)_r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$     $(5)_3 =$

**مثال:** در کدام یک از موارد زیر، ترتیب قرار گرفتن اهمیت دارد و در کدام یک ترتیب قرار گرفتن اهمیت ندارد؟  
(۱) ساختن کلمه ای ۳ حرفی بدون تکرار با ۵ حرف متمایز (با و بی معنی).  
(۲) انتخاب سه شاخه گل از بین پنج شاخه گل متمایز.  
(۳) انتخاب یک دفاع چپ، یک دفاع راست و یک دفاع وسط از بین هفت مدافع که همگی در تمامی پست های توانایی بازی دارند.  
(۴) از بین ۷ بازیکن دفاعی یک تیم ۳ نفر قرار است بر کنار شوند.  
(۵) ده نفر در یک دوره مسابقات شرکت خواهند کرد و سه نفر اول به المپیک راه خواهند یافت.  
(۶) ده نفر در یک مسابقه شرکت کرده اند و قرار است به نرات اول تا سوم به مدال های طلا، نقره و برنز داده شود.

**مثال:** با حروف کلمه «جهانگردی» و بدون تکرار حروف:

چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت؟

چند تا از آنها به «گردی» ختم می شوند؟

$$\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} = \binom{n}{r}$$

$$\binom{10}{7} + \binom{10}{8} =$$

$$\binom{10}{2} + \binom{10}{3} + \binom{11}{4} + \binom{12}{5} + \dots + \binom{20}{13} =$$

**مثال:** در یک نوع ماشین حساب کوچک که دارای ۲۰ کلید است، برای انجام یک دستور خاص باید سه کلید مشخص با ترتیبی مشخص فشار داده شوند. اگر فردی نداند سه کلید مورد نظر کدامند و بخواهد به طور تصادفی این کار را انجام دهد و فشردن هر سه کلید ۲ ثانیه زمان بخواهد، این فرد حداکثر (در بدترین حالت) در چه زمانی می تواند دستور مورد نظر را اجرا کند؟

**مثال:** از میان شش کتاب مختلف:

الف) به چند طریق می توانیم چهار کتاب را در یک قفسه کنار هم بچینیم؟

ب) به چند طریق می توان چهار کتاب را برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کرد؟

**مثال:** از بین تعدادی کتاب مختلف می خواهیم سه کتاب را انتخاب کنیم و در قفسه های بچینیم. اگر تعداد حالت های مختلف برای این کار ۲۱۰ تا باشد، تعداد کتاب ها چند تا است؟

۶ (۱)  
۷ (۲)  
۸ (۳)  
۹ (۴)

**مثال:** در یک لیگ فوتبال ۱۸ تیم قرار دارند. در پایان این لیگ تیم های اول تا سوم به چند حالت مختلف می توانند مشخص شوند؟

۱)  $\frac{18!}{15!}$  (۲)  $\frac{18!}{3!}$  (۳)  $\frac{17!}{15!}$  (۴)  $\frac{17!}{3!}$

**مثال:** دانش آموزی باید از میان ۱۰ سوال که پاسخ به ۳ تای اول آنها اجباری است به ۸ سوال پاسخ دهد. به چند روش این کار انجام می پذیرد؟

۱) ۳۲ (۲) ۲۸ (۳) ۲۵ (۴) ۲۱

**مثال:** یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه هیچ محدودیتی در استفاده از ادویه ها نداشته باشد؟

۱۲۰ (۱) ۱۳۰ (۲) ۱۶۰ (۳) ۱۸۰ (۴)

**مثال:** با ارقام ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ چند عدد ۳ رقمی با شرط «رقم صدگان < رقم دهگان < رقم یکان» می توان نوشت؟

۸ (۱) ۹ (۲) ۱۰ (۳) ۱۲ (۴)

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

۱۶ (۱) ۱۴ (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴)

**مثال:** با استفاده از نقاط روی شکل چند مثلث می توان ایجاد کرد؟

**ساده:** گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق می تواند دسته گل های متمایز درست کند به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱۲۶ (۱) ۱۴۰ (۲) ۱۵۴ (۳) ۱۶۸ (۴)

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

۵۰ (۱) ۶۰ (۲) ۷۰ (۳) ۳۰ (۴)

**مثال:** از بین دو مدرس ریاضی، دو مدرس فیزیک و دو مدرس شیمی، قرار است یک کمیته دو نفره انتخاب شود، به گونه ای که دو نفر انتخاب شده هم رشته نباشند. چند حالت برای انجام این کار وجود دارد؟

۱۸ (۱) ۲۴ (۲) ۱۲ (۳) ۳۶ (۴)

**سخت:** از بین ۵ دانش آموز تجربی و ۳ دانش آموز ریاضی، به چند طریق می توان ۳ نفر برای کار در آزمایشگاه انتخاب کرد؛ به طوری که لااقل ۲ نفر از آن ها دانش آموز تجربی باشند؟

۲۵ (۱) ۳۰ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

۱۲۵ (۱) ۱۴۵ (۲) ۱۵۵ (۳) ۱۶۵ (۴)

**مثال:** از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هر گاه کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

۱۱۸ (۱) ۱۱۶ (۲) ۱۲۸ (۳) ۱۲۶ (۴)

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

۱۲۵ (۱) ۱۴۵ (۲) ۱۵۵ (۳) ۱۶۵ (۴)

**مثال:** در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً دو داور ایرانی داشته باشد؟

۱۰۶ (۱) ۱۱۲ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۴ (۴)

**مثال:** یک آشپز ۱۰ نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۴ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه ۳ ادویه هستند که نباید هر ۳ با هم استفاده شوند؟

۳۰۲ (۱) ۱۹۷ (۲) ۲۰۳ (۳) ۱۷۹ (۴)

**مثال:** یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه سه ادویه هستند که نباید هر سه با هم استفاده شوند؟

۱۲۰ (۱) ۱۱۷ (۲) ۱۰۸ (۳) ۱۱۹ (۴)

**مثال:** یک آشپز ده نوع ادویه دارد. او با استفاده از هر ۳ تا از این ادویه ها یک طعم مخصوص درست می کند. این آشپز چند طعم می تواند درست کند هر گاه ادویه ها به ۲ دسته ۵ تایی تقسیم می شوند که هیچ یک از ادویه های دسته اول با هیچ یک از ادویه های دسته دوم سازگاری ندارند؟

۲۰ (۱) ۲۵ (۲) ۳۵ (۳) ۴۰ (۴)

**سبغ ۹۸:** از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند به چند طریق می توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به طوری که هیچ دو نفر از یک مدرسه نباشند؟

۱۳۵ (۱) ۲۷۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۶۴۰ (۴)

۱۰۶

**احتمالی ۹۹:** از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند به چند طریق می توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به طوری که: دو نفر از یک مدرسه باشند؟

۱۳۵ (۱) ۲۷۰ (۲) ۳۲۰ (۳) ۶۸۰ (۴)

۱۰۷

**مثال:** از هریک از ۸ مدرسه علاقه مند، ۶ نفر برای بازی تنیس ۴ نفری (۲ نفر همیار از یک مدرسه در مقابل ۲ نفر همیار از مدرسه ای دیگر) انتخاب شده اند. به چند طریق این بازی ممکن است انجام شود؟

۴۲۰۰ (۱) ۵۴۰۰ (۲) ۵۶۰۰ (۳) ۶۳۰۰ (۴)

۱۰۸

**مثال:** ۶ کتاب ادبیات متمایز و ۲ کتاب شیمی متمایز را به چند طریق می توان در یک قفسه کنار هم چید، به طوری که ۲ کتاب ادبیات بین ۲ کتاب شیمی قرار گیرد؟

۶۴۰۰ (۱) ۷۲۰۰ (۲) ۸۴۰۰ (۳) ۹۶۰۰ (۴)

۱۰۹

**مثال:** با حروف کلمه computer چند کلمه ۵ حرفی می توان ساخت که شامل حروف کلمه com باشد؟

۱۲۰۰ (۱)

۱۲۲۰ (۲)

۱۲۶۰ (۳)

۱۲۸۰ (۴)

۱۱۰

**مثال:** با حروف کلمه computer چند کلمه ۸ حرفی می توان نوشت که حروف "com" کنار هم نباشند؟

۱۲۰۰ (۱) ۱۲۲۰ (۲) ۱۲۶۰ (۳) ۱۲۸۰ (۴)

۱۱۱

**مثال:** به چند طریق حروف a, b, c, d, e, f را می توان ردیف کرد به طوری که حروف a و b کنار هم بوده و c و d کنار هم نباشند؟

۱۴۴ (۱)

۱۶۸ (۲)

۱۵۶ (۳)

۱۴۸ (۴)

۱۱۲

**سبغ ۹۲:** تعداد جایگشت های حروف کلمه SYSTEM به طوری که S ها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱۲۰ (۱) ۱۸۰ (۲) ۲۴۰ (۳) ۳۶۰ (۴)

۱۱۳

شمارش و معرفی نماد فاکتوریل (!)

جایگشت

چند شیء کنار هم باشند یا نباشند (جعبه)

جایگشت یک درمیان

تقدم و تاخر

انتخاب، انتخاب و چینش

زیر مجموعه

۱۱۴

**مثال:** تعداد زیر مجموعه ها؟

$A = \{a, b, c\}$

۱۱۵

**مثال:** تعداد زیر مجموعه های ۴ عضوی و ۵ عضوی از مجموعه A با هم برابر است. این مجموعه چند زیر مجموعه زوج عضوی دارد؟

۵۱۲ (۱) ۲۵۶ (۲) ۳۳۶ (۳) ۱۲۸ (۴)

۱۱۶

**مثال:** تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه  $\{a, b, c, d, e, \{a\}\}$  شامل عضو a کدام است؟

۲۰ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

۸ (۴)

۱۱۷

**مثال:** تعداد زیر مجموعه های سه عضوی از مجموعه  $\{a, b, c, d, e, \{a\}\}$  که شامل عضو a نباشد؟

۲۰ (۱)

۱۰ (۲)

۱۲ (۳)

۸ (۴)

۱۱۸

**مثال:** مجموعه  $\{a, b, c, d, e, f\}$  چند زیر مجموعه شامل a و d و فاقد f دارد؟

۸ (۱) ۱۶ (۲) ۳۲ (۳) ۲۴ (۴)

۱۱۹

پایان

۱۲۰



### آنچه خواهید دید :

#### ○ مثال

اگر فضای نمونه‌ای پرتاب سکه و تاس دارای ۴۳۲ عضو باشد، تعداد سکه و تاس؟

#### ○ مثال

اگر فضای نمونه‌ای پرتاب سکه و تاس دارای ۵۷۶ عضو باشد، تعداد سکه و تاس؟

#### ○ تالیفی

سکه‌ای را به هوا می‌اندازیم. اگر (پشت) بیاید، یک تاس و اگر (رو) بیاید، یک تاس و یک سکه می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

- ۱ فضای نمونه‌ای
- ۲ پیشامد و انواع آن
- ۳ قوانین روی مجموعه‌ها
- ۴ اعمال روی پیشامدها
- ۵ دو پیشامد سازگار و ناسازگار
- ۶ احتمال وقوع یک پیشامد
- ۷ احتمال متمم
- ۸ پرتاب دو تاس
- ۹ مجموع دو تاس
- ۱۰ مجموع دو تاس مضرب (شمارنده‌های ۱۲)
- ۱۱ پرتاب سه تاس
- ۱۲ مجموع سه تاس
- ۱۳ فرزند و سکه (جایگاه معلوم)
- ۱۴ فرزند و سکه (جایگاه نامعلوم)
- ۱۵ احتمال شرطی و دو پیشامد مستقل
- ۱۶ احتمال اشتراک (مستقل، ناسازگار)
- ۱۷ احتمال «یا» برای دو پیشامد
- ۱۸ احتمال مسائل تولد

### فضای نمونه‌ای



۱۲(۱)      ۱۸(۲)      ۳۶(۳)      ۴۲(۴)

#### ○ تالیفی

تاسی را به هوا می‌اندازیم. اگر کمتر از ۳ بیاید، یک تاس و در غیر این صورت یک تاس و یک سکه می‌اندازیم. فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی چند عضو دارد؟

۱۲(۱)      ۱۸(۲)      ۳۶(۳)      ۶۰(۴)

#### ○ مثال

در هر قسمت تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را به دست آورید.

سکه‌ای را ۳ بار پرتاب می‌کنیم.	۳ سکه را با هم پرتاب می‌کنیم.
تاسی را ۴ بار پرتاب می‌کنیم.	۴ تاس را با هم پرتاب می‌کنیم.

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

### تعداد بازی

### پیشامد و انواع آن

هر زیر مجموعه از فضای نمونه ای

در پرتاب یک تاس پیشامد آن که:

- عدد روشده زوج باشد.
- عدد روشده کوچک تر از ۷ باشد.
- عدد روشده بزرگ تر از ۶ باشد.

تعداد  $\rightarrow \{3, 4, 5, \dots, 18\}$

تعداد  $\rightarrow \{3, 6, 9, \dots, 18\}$

#### مثال

تعداد اعداد طبیعی کوچک تر از ۱۰۰ و بزرگ تر از ۲۰ که مضرب ۷ باشد؟

#### مثال

یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم؛ پیشامد این که:

● تاس زوج بیاید.

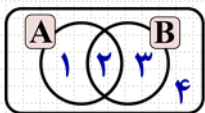
● سکه پشت بیاید.

#### تألیفی

اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچک تر از ۵۰ را روی کارت هایی نوشته و کارت ها را درون کیسه قرار می دهیم و از درون کیسه به تصادف کارت را خارج می کنیم. تعداد عضوهای فضای نمونه ای؟

۱۶۰(۴)      ۱۲۰(۳)      ۱۲(۲)      ۱۶(۱)

### قوانین روی مجموعه ها



$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$A - B = A \cap B'$$

$$B - A = B \cap A'$$

A:	A':
B:	B':
$A \cap B$ :	$(A \cap B)'$ :
$A \cup B$ :	$(A \cup B)'$ :
$A - B$ :	$(A - B)'$ :
$B - A$ :	$(B - A)'$ :

#### مثال

۲ مهره از جعبه ای شامل ۴ مهره متمایز، خارج می کنیم.  $n(S) = ?$

دومهره باهم	دومهره پیاپی (بی ج)	دومهره پیاپی (با ج)

## درس ۲: احتمال

### مثال

اگر A پیشامد قبولی علی و B پیشامد قبولی یهزاد در کنکور باشد، آن گاه پیشامدهای زیر را توصیف کنید.

- هر دو قبول شوند.
- فقط علی قبول شود.
- فقط یهزاد قبول شود.
- فقط یکی قبول شود.
- هیچ کدام قبول نشوند.
- حداقل یکی قبول شود.
- حداکثر یکی قبول شود.

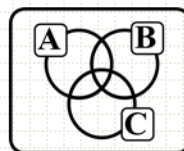
### مثال

تاسی را پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد زوج آمدن، B پیشامد عدد اول آمدن و C پیشامد مضرب ۳ آمدن باشد، پیشامد این که:

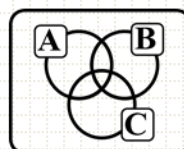
- حداقل یکی رخ دهد.
- A یا C رخ دهند، ولی B رخ ندهد.
- هر سه با هم رخ دهند.
- A رخ دهد ولی B و C با هم رخ ندهند.

### مثال

اگر A، B و C سه پیشامد از فضای نمونه ای S باشند، نمودار ون؟



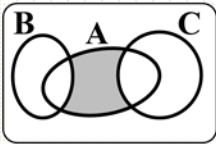
- A یا B رخ دهد ولی C و همزمان رخ ندهد.



- رخ دادن دقیقاً یک پیشامد از این سه پیشامد.

### ○ انسانی ۹۹

مجموعه های A، B و C مطابق شکل اند. کدام مورد برای قسمت سایه خورده نادرست است؟



(۱)  $A \cap (B \cup C)'$

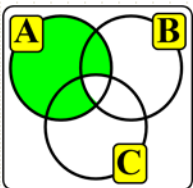
(۲)  $A \cap (B' \cap C')$

(۳)  $(A - C) \cap (A - B)$

(۴)  $(A - C) \cup (A - B)$

### ○ خ انسانی ۹۹

مجموعه های A، B و C مطابق شکل اند. کدام مورد برای قسمت سایه خورده نادرست است؟



(۱)  $(A - B) \cup (A - C)$

(۲)  $A \cap (B' \cup C')$

(۳)  $A - (B \cap C)$

(۴)  $A - (B \cup C)$

### اعمال روی پیشامدها

- $A \cup B =$
- $A \cap B =$
- $(A \cup B)' =$
- $(A \cap B)' =$
- $A - B =$
- $B - A =$

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

تألیفی

یک تاس را پرتاب می‌کنیم. کدام گزینه صحیح است؟ اگر:

A = پیشامد زوج آمدن

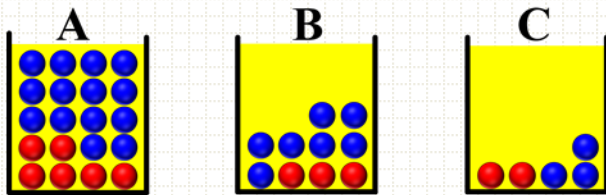
B = پیشامد عدد حداکثر ۳

C = پیشامد ظاهر شدن عدد ۳

(۱) پیشامدهای A و B ناسازگارند. (۲) پیشامدهای B و C ناسازگارند.

(۳) پیشامدهای A و C سازگارند. (۴) پیشامدهای C و B' ناسازگارند.

### احتمال وقوع یک پیشامد



$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

احتمال وقوع پیشامد A

مثال

در پرتاب یک تاس، احتمال آن که:

- عدد رو شده کمتر از ۷ باشد.
- عدد رو شده زوج و بزرگتر از ۲ باشد.
- عدد رو شده اول نباشد.
- عدد رو شده ناکمتر از ۳ باشد.
- عدد رو شده مضرب ۷ باشد.

تألیفی

مجموعه  $\{x \in S | x \in B \wedge x \notin A\}$  معادل کدام گزینه است؟

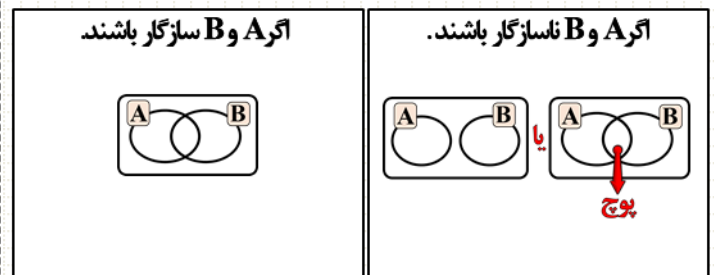
(۱)  $B - A'$

(۲)  $(A \cap B)'$

(۳)  $A' - B$

(۴)  $B - (A \cap B)$

### دو پیشامد سازگار و ناسازگار



تألیفی

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، حاصل پیشامد  $((A \cap B)' - (B \cap A'))'$  کدام است؟

(۱) A      (۲) A'      (۳)  $A \cap B$       (۴)  $A \cup B$

تألیفی

پیشامد این که A یا B رخ دهند ولی A و B همزمان رخ ندهند، با کدام مجموعه ناسازگار است؟ (S مجموعه مرجع است)

(۱)  $A \cap B'$       (۲)  $A \cup B$       (۳)  $(A \cap B)'$       (۴)  $A' \cap B'$

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

### ○ انسانی ۸۷

### ○ مثال

در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد که:

تعداد کسانی که به یک پرسش مطرح شده، پاسخ درست داده اند، طبق جدول زیر از لحاظ جنسیت و سن دسته بندی شده اند. اگر فقط یک جایزه به یکی از آن ها داده شود، با کدام احتمال برنده جایزه مرد و بیشتر از ۳۰ سال می باشند؟

	مرد	زن
بیشتر از ۳۰ سال	۴۸	۳۵
کمتر از ۳۰ سال	۸۲	۷۵

۲ مهره قرمز و ۱ مهره آبی باشند.

هر سه مهره آبی باشند.

○/۱۶(۱)      ○/۱۸(۲)      ○/۲۰(۳)      ○/۲۵(۴)

### ○ انسانی ۹۰

جدول زیر تعداد لامپ های موجود ۶۰ وات و ۱۰۰ وات از تولیدات دو کارخانه A و B است. اگر یک لامپ به تصادف برداشته شود، با کدام احتمال این لامپ ۱۰۰ واتنی است؟

	۱۰۰ وات	۶۰ وات
A	۱۴	۲۰
B	۳۴	۲۲

تعداد آبی بیشتر از تعداد قرمز

هر سه مهره هم رنگ باشند.

○/۱۵(۱)      ○/۱۵(۲)      ○/۵(۳)      ○/۹(۴)

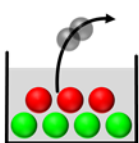
### ○ مثال

ظرفی شامل ۳ مهره قرمز و ۴ مهره سبز است. به تصادف دو مهره \_\_\_\_\_ از ظرف خارج می کنیم. احتمال هم رنگ بودن؟

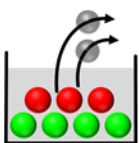
### ○ انسانی ۹۷

اعداد یک رقمی ۱، ۲، ۳، ...، ۹ بر روی ۹ کارت یکسان نوشته شده است. اگر یک کارت از بین آن ها بیرون آوریم، احتمال این که عدد آن، بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد، کدام است؟

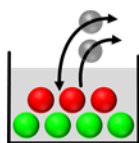
باهم



پیایی (بی جایگناری)



پیایی (با جایگناری)



○/۱۵(۱)      ○/۳(۲)      ○/۴(۳)      ○/۹(۴)

### ○ خ انسانی ۹۷

اعداد یک رقمی ۲۰، ۳، ۲، ۱، ...، ۲۰ بر روی ۲۰ گوی نوشته شده است. اگر یک گوی از بین آن ها بیرون آوریم با کدام احتمال عدد آن زوج ولی بر ۳ بخش پذیر نیست؟

○/۳(۱)      ○/۳۵(۲)      ○/۴(۳)      ○/۴۵(۴)

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

مثال

ظرفی شامل ۵ مهره با شماره ۱ تا ۵ است. به تصادف دو مهره ..... از ظرف خارج می کنیم. احتمال متوالی بودن شماره های دو مهره ؟

<p>بهم</p>	<p>پیایی (بی جایگناری)</p>	<p>پیایی (با جایگناری)</p>
------------	----------------------------	----------------------------

تألیفی

در جعبه ای ۲ مهره قرمز و ۳ مهره آبی و ۴ مهره سفید است. به تصادف ۲ مهره از آن بیرون می آوریم. احتمال این که ۲ مهره انتخابی قرمز نباشد، کدام است ؟

$$\frac{1}{4} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{7}{12}$$

انسانی ۹۹

در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه یکسان، قرار دارد. به تصادف ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال، ۲ مهره سفید و یک مهره سیاه، خارج می شود ؟

$$\frac{11}{21} \quad \frac{10}{21} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{5}{14}$$

مثال

ظرفی شامل ۵ مهره با شماره ۱ تا ۵ است. به تصادف دو مهره ..... از ظرف خارج می کنیم. احتمال مجموع مضرب ۳ ؟

<p>بهم</p>	<p>پیایی (بی جایگناری)</p>	<p>پیایی (با جایگناری)</p>
------------	----------------------------	----------------------------

مثال

در پرتاب همزمان دو تاس، احتمال متوالی بودن ؟ (تخ ۹۰)

مثال

یک تاس را ۲ بار پیایی می اندازیم احتمال متوالی بودن ؟

مثال

در پرتاب همزمان سه تاس، احتمال متوالی بودن ؟

مثال

یک تاس را ۳ بار پیایی می اندازیم احتمال متوالی بودن ؟

## درس ۲: احتمال

○ خ انسانی ۹۸

جعبه ای شامل ۸ سیب سالم و ۴ سیب لکه دار است. به تصادف ۳ سیب از آن خارج می کنیم. با کدام احتمال فقط ۲ سیب خارج شده، سالم است؟

$$\frac{7}{15} (1)$$

$$\frac{8}{15} (2)$$

$$\frac{24}{55} (3)$$

$$\frac{28}{55} (4)$$

○ خ تجربی ۹۵

در جعبه ای ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه و ۲ مهره قرمز است. به تصادف ۳ مهره از آن بیرون می آوریم. با کدام احتمال فقط یکی از مهره ها سفید است؟

$$\frac{8}{21} (1)$$

$$\frac{17}{42} (2)$$

$$\frac{10}{21} (3)$$

$$\frac{9}{14} (4)$$

○ تألیفی

در جعبه ای ۱۲ سیب داریم که ۵ سیب خراب است. ۳ سیب به تصادف بر می داریم. با کدام احتمال تعداد سیب های سالم انتخاب شده از تعداد سیب های خراب بیشتر است؟

$$\frac{5}{22} (1)$$

$$\frac{3}{11} (2)$$

$$\frac{7}{22} (3)$$

$$\frac{4}{11} (4)$$

○ انسانی ۹۸

در ظرفی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه است. به تصادف دو مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های خارج شده، از یک رنگ هستند؟

$$\frac{5}{14} (1)$$

$$\frac{3}{7} (2)$$

$$\frac{4}{7} (3)$$

$$\frac{9}{14} (4)$$

○ خ تجربی ۹۶

در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۳ مهره سبز و ۲ مهره قرمز وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال فقط دو مهره خارج شده، هم رنگ هستند؟

$$\frac{41}{120} (1)$$

$$\frac{79}{120} (2)$$

$$\frac{37}{60} (3)$$

$$\frac{31}{60} (4)$$

○ تجربی ۹۶

در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره آبی وجود دارد. سه مهره به تصادف از کیسه خارج می کنیم. با کدام احتمال رنگ مهره های خارج شده، متفاوت است؟

$$\frac{5}{22} (1)$$

$$\frac{3}{11} (2)$$

$$\frac{7}{22} (3)$$

$$\frac{4}{11} (4)$$

$$\frac{7}{13} (1)$$

$$\frac{7}{12} (2)$$

$$\frac{7}{11} (3)$$

$$\frac{7}{10} (4)$$

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

### مثال

در جعبه ای ۴ مهره آبی و ۳ مهره قرمز وجود دارد. اگر از این جعبه سه مهره به تصادف خارج کنیم، چقدر احتمال دارد که:

حداکثر یک مهره قرمز باشد.

حداقل دو مهره قرمز باشد.

### تألیفی

در ظرفی ۷ مهره که روی آن‌ها اعداد ۱ تا ۷ نوشته شده وجود دارد. ۳ مهره خارج می‌کنیم، احتمال اینکه مجموع ۳ مهره زوج باشد، کدام است؟

$$\frac{16}{35} (4) \quad \frac{17}{35} (3) \quad \frac{18}{35} (2) \quad \frac{19}{35} (1)$$

### تجربی ۸۹

حروف کلمه ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A کنار هم قرار می‌گیرند؟

روش ۱	روش ۲

$$\frac{1}{3} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{1}{5} (2) \quad \frac{1}{6} (1)$$

### خ ریاضی ۸۷

در ظرفی پنج مهره با شماره های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ قرار دارند. دو مهره با هم بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال مجموع دو مهره عددی فرد است؟

$$0/4 (1) \quad 0/5 (2) \quad 0/6 (3) \quad 0/7 (4)$$

### تألیفی

حروف کلمه ATAXIA را بریده و به طور تصادفی کنار هم قرار می‌دهیم. با کدام احتمال هر سه حرف A یک در میان قرار می‌گیرند؟

روش ۱	روش ۲

$$\frac{1}{3} (4) \quad \frac{1}{4} (3) \quad \frac{2}{5} (2) \quad \frac{2}{6} (1)$$

### ریاضی ۸۸

اعداد ۱ تا ۶ را بر روی ۶ کارت یکسان نوشته‌اند. اگر به تصادف دو کارت از بین آن‌ها بیرون آوریم، با کدام احتمال مجموع دو کارت زوج می‌باشد؟

$$\frac{5}{9} (4) \quad \frac{4}{9} (3) \quad \frac{2}{5} (2) \quad \frac{1}{4} (1)$$



# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

### ○ تألیفی

پدر و مادر و چهار فرزند آن‌ها در صف می‌ایستند. با کدام احتمال پدر و مادر کنار هم هستند؟

$$\frac{1}{5}(1) \quad \frac{1}{6}(2) \quad \frac{1}{3}(3) \quad \frac{1}{4}(4)$$

### ○ تألیفی

یازده بازیکن فوتبال تیم یک مدرسه به طور تصادفی کنار یکدیگر قرار می‌گیرند تا عکس یادگاری بیندازند. چنانچه دروازه بان و کاپیتان تیم دو نفر متفاوت باشند، احتمال اینکه در عکس، دقیقاً ۴ نفر بین دروازه بان و کاپیتان حضور داشته باشند، کدام است؟

$$\frac{6}{55}(1) \quad \frac{3}{55}(2) \quad \frac{9}{55}(3) \quad \frac{7}{55}(4)$$

### ○ تألیفی

۷ پرچم مختلف را به هفت میله پرچم نصب کرده ایم و روی میله‌ها شماره‌های ۱ تا ۷ را حک کرده ایم. چنانچه این پرچم‌ها به طور تصادفی کنار هم قرار بگیرند، مطلوب است محاسبه احتمال این که میله پرچم‌ها با شماره‌های غیر اول در مکان‌های زوج باشند.

$$\frac{1}{35}(1) \quad \frac{2}{35}(2) \quad \frac{3}{35}(3) \quad \frac{4}{35}(4)$$

### ○ تألیفی

هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ می‌توان نوشت را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و سپس یک کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. احتمال این که عدد روی کارت مضرب ۶ باشد، چقدر است؟ (تکرار نه)

$$\frac{1}{5}(4) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{1}{3}(2) \quad \frac{1}{5}(1)$$

### ○ تألیفی

هر یک از اعداد دو رقمی که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ می‌توان نوشت را روی کارت‌هایی می‌نویسیم و سپس یک کارت به تصادف بیرون می‌کشیم. احتمال این که عدد روی کارت اول باشد، چقدر است؟ (تکرار نه)

$$\frac{1}{4}(1) \quad \frac{1}{3}(2) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{1}{5}(4)$$

### ○ تألیفی

با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ هر یک از اعداد سه رقمی بدون تکرار را روی یک کارت نوشته و از میان آن‌ها کارت‌هایی به تصادف انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی عدد ۳ رقمی ساخته شده، مضرب ۵ نیست؟

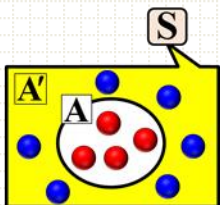
$$\frac{1}{5}(1) \quad \frac{2}{6}(2) \quad \frac{3}{7}(3) \quad \frac{4}{8}(4)$$

### ○ ریاضی ۸۵

اگر یک عدد ۳ رقمی با کنار هم قرار گرفتن ارقام متمایز ۱، ۲، ۳، ۴ به طور تصادفی به وجود آید، احتمال آن که این عدد زوج باشد؟

$$\frac{3}{8}(1) \quad \frac{2}{4}(2) \quad \frac{3}{5}(3) \quad \frac{5}{8}(4)$$

### احتمال متمم



احتمال اینکه مریم به دانشگاه برود  $\frac{1}{5}$  است. احتمال این که به دانشگاه نرود \_\_\_\_\_ است.

احتمال این که فردا بارانی باشد  $\frac{3}{5}$  است. احتمال این که فردا بارانی نباشد \_\_\_\_\_

## فصل: آمار و احتمال

### درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

#### تالیفی

احتمال این که فردا بارانی باشد  $\frac{3}{5}$  احتمال آن است که فردا بارانی نباشد، احتمال آن که فردا بارانی نباشد، کدام است؟

$$\frac{3}{8}(1)$$

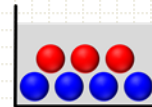
$$\frac{5}{8}(2)$$

$$\frac{3}{4}(3)$$

$$\frac{1}{4}(4)$$

#### مثال

از ظرف زیر، سه مهره به تصادف خارج می کنیم. احتمال این که:



حداقل یک مهره آبی باشد.

حداکثر ۲ مهره قرمز باشد.

#### خ تجربی ۹۳

در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟

$$\frac{31}{42}(1)$$

$$\frac{37}{42}(2)$$

$$\frac{67}{84}(3)$$

$$\frac{73}{84}(4)$$

#### ریاضی ۹۵

در کیسه ای ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز موجود است، اگر سه مهره از کیسه خارج کنیم، با کدام احتمال حداکثر ۲ مهره از مهره های خارج شده هم رنگ هستند؟

$$\frac{17}{22}(1)$$

$$\frac{19}{22}(2)$$

$$\frac{39}{44}(3)$$

$$\frac{41}{44}(4)$$

#### تالیفی

در یک پارک جنگلی، ۷ قوچ وحشی وجود دارد. محیط باتان ۳ تای آن ها را گرفته و پس از نشان دار کردن رهایشان می کنند. بعد از مدتی محیط باتان به طور تصادفی ۴ تای آن ها را گرفته و تعداد قوچ های نشان دار را می شمارند. با چه احتمالی حداکثر ۲ قوچ نشان دارند؟

$$\frac{37}{35}(1)$$

$$\frac{31}{35}(2)$$

$$\frac{29}{35}(3)$$

$$\frac{23}{35}(4)$$

#### انسانی ۰۰

یک کتابخانه ۵ کتاب ریاضی، ۳ کتاب ادبیات و ۲ کتاب داستان دارد. ۴ کتاب به دلخواه انتخاب می کنیم. با کدام احتمال این چهار کتاب، حداقل دو موضوع مختلف دارند؟

$$\frac{19}{21}(1)$$

$$\frac{13}{14}(2)$$

$$\frac{20}{21}(3)$$

$$\frac{41}{42}(4)$$

## درس ۲: احتمال

### ○ تجربی ۹۴

در جعبه‌ای ۳ مهره سفید، ۲ مهره سیاه و ۵ مهره قرمز موجود است. اگر ۲ مهره از آن خارج کنیم، با کدام احتمال این دو مهره هم‌رنگ نیستند؟

$$\frac{28}{45} (1)$$

$$\frac{29}{45} (2)$$

$$\frac{31}{45} (3)$$

$$\frac{32}{45} (4)$$

### ○ تالیفی

از بین زیر مجموعه‌های یک مجموعه ۸ عضوی، زیرمجموعه‌ای به تصادف انتخاب می‌کنیم. چقدر احتمال دارد که ۴ عضوی نباشد؟

$$\frac{93}{128} (1)$$

$$\frac{73}{128} (2)$$

$$\frac{79}{256} (3)$$

$$\frac{97}{256} (4)$$

### ○ انسانی ۹۰

در یک ظرف ۴ گوی قرمز با شماره‌های ۱ تا ۴ و در ظرف دیگر ۷ گوی آبی با شماره‌های ۱ تا ۷ قرار دارند. به‌طور تصادفی از هر ظرف یک گوی خارج می‌کنیم. با کدام احتمال، لاقل شماره یکی از آن‌ها عدد ۳ است؟

$$\frac{3}{14} (1)$$

$$\frac{5}{14} (2)$$

$$\frac{1}{7} (3)$$

$$\frac{3}{7} (4)$$

### ○ انسانی ۹۳

صفحه عقربه‌دار A به ۴ قسمت مساوی با شماره‌های ۱ تا ۴ و صفحه عقربه‌دار B به ۵ قسمت برابر با شماره‌های ۱ تا ۵ تقسیم شده است. هر دو عقربه را می‌چرخانیم. با کدام احتمال لاقل یکی از عقربه‌ها روی ناحیه‌های فرد قرار می‌گیرند؟

$$0/6 (1)$$

$$0/7 (2)$$

$$0/8 (3)$$

$$0/9 (4)$$

### ○ انسانی ۹۴

هر یک از ارقام ۱ تا ۵ بر روی ۵ گوی یکسان نوشته شده است. یک گوی از بین آنها برداشته و با ثبت شماره آن، دوباره به ظرف بر می‌گردانیم. با تکرار متوالی این آزمایش عدد تصادفی ۳ رقمی حاصل می‌شود. کدام احتمال در این عدد ۳ رقمی، لاقل دو رقم مساوی است؟

$$0/45 (1)$$

$$0/48 (2)$$

$$0/52 (3)$$

$$0/54 (4)$$

## پرتاب دو تاس

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

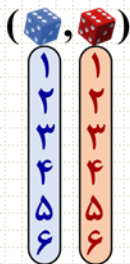
● دو عدد رو شده مثل هم باشند؟

● دو عدد رو شده غیرمساوی باشند؟

● عدد یک تاس بیشتر از عدد دیگری؟

● عدد تاس اول بیشتر از عدد تاس دوم؟

● عدد تاس اول کمتر از عدد تاس دوم؟



### درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

● هر دو تاس فرد باشد.

● هر دو تاس اول باشد.

● هر دو تاس زوج (مضرب ۲) باشد.

● هر دو تاس مضرب ۳ باشد.

مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

● هر دو تاس بین ۲ و ۵ باشد.

● هر دو تاس کمتر از ۵ باشد.

● اولی کمتر از ۳ باشد.

● یکی از آن ها کمتر از ۳ باشد.

مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

● عدد دومی ۳ برابر اولی .

● عدد یکی ۳ برابر دیگری .

● عدد اولی نصف دومی .

● عدد یکی نصف دیگری .

مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

● اولی ۲ واحد بیشتر از دومی

● اختلاف ۲ واحد باشد.

● حاصلضرب ۱۲ باشد.

● حاصلضرب بیشتر از ۱۵

# فصل: آمار و احتمال

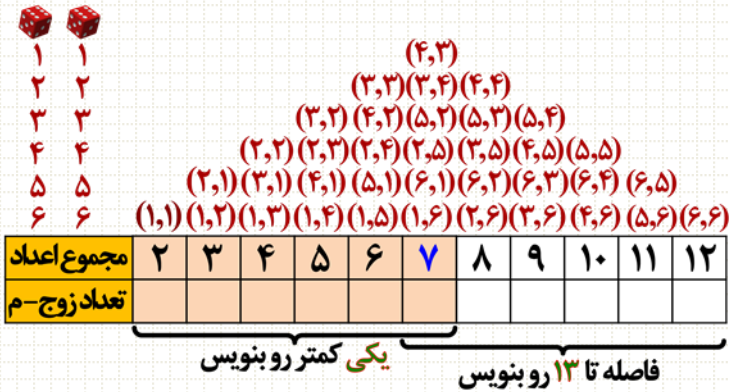
## درس ۲: احتمال

### مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

- حداقل یکی زوج بیاید.
- حداکثر یکی زوج بیاید.

### مجموع دو تاس



در یک بازی ۱۱ نفره، به هر شخصی یکی از شماره های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ را نسبت می دهیم. سپس با پرتاب دو تاس، اعداد رو شده را با هم جمع می کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد برنده می شود.

- احتمال برنده شدن کدام شماره نسبت به بقیه بیشتر است؟
- احتمال برنده شدن کدام شماره ها از همه کمتر است؟

### انسانی ۸۹

در پرتاب همزمان دو تاس، با کدام احتمال لاقفل یکی از اعداد رو شده، مضرب ۳ است؟

### مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

- مجموع دو عدد رو شده ۵ باشد؟

- مجموع دو عدد شده ۴ یا ۸ باشد؟

- مجموع دو عدد رو شده مربع کامل؟

- مجموع دو عدد رو شده عدد اول؟

### تألیفی

دو مکعب را با هم می اندازیم. با کدام احتمال مجموع دو عدد رو شده زوج است؟

$$\frac{5}{6}(4) \quad \frac{2}{3}(3) \quad \frac{5}{9}(2) \quad \frac{4}{9}(1)$$

### انسانی ۹۲

در پرتاب دو تاس با کدام احتمال، اعداد ۵ یا ۶ یا هر دو ظاهر می شوند؟

$$\frac{11}{18}(4) \quad \frac{5}{9}(3) \quad \frac{4}{9}(2) \quad \frac{1}{3}(1)$$

$$\frac{1}{8}(4) \quad \frac{1}{6}(3) \quad \frac{1}{4}(2) \quad \frac{1}{2}(1)$$

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

○ انسانی ۸۳

در پرتاب دو تاس با کدام احتمال، مجموع دو عدد رو شده بزرگتر از ۳ است؟

$\frac{11}{12}$  (۱)       $\frac{8}{9}$  (۲)       $\frac{5}{6}$  (۳)       $\frac{3}{4}$  (۴)

○ خ انسانی ۹۸

دو تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ می باشد؟

$\frac{5}{9}$  (۱)       $\frac{7}{12}$  (۲)       $\frac{3}{4}$  (۳)       $\frac{5}{6}$  (۴)

### مجموع دو تاس مضرب شمارنده های ۱۲

مجموع اعداد	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد حالات											

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

مجموع مضرب ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ باشد؟

$\frac{7}{12}$  (۱)       $\frac{5}{9}$  (۲)       $\frac{4}{9}$  (۳)       $\frac{5}{12}$  (۴)

○ تألیفی

دو مکعب قرمز و آبی را می اندازیم. چقدر احتمال دارد که مکعب قرمز ۵ بیاید یا عدد مکعب آبی بیشتر از مکعب قرمز باشد؟

$\frac{7}{12}$  (۱)       $\frac{4}{9}$  (۲)       $\frac{5}{12}$  (۳)       $\frac{5}{12}$  (۴)

○ مثال

در پرتاب همزمان دو تاس احتمال این که:

هر دو تاس فرد و مجموع ۶؟      هر دو تاس اول و مجموع ۸؟

هر دو تاس زوج و اختلاف ۴؟      هر دو یکسان و مجموع ۴؟

○ تألیفی

دو تاس را با هم می اندازیم. احتمال آنکه مجموع دو عدد رو شده مضرب ۵ نباشد، کدام است؟

$\frac{7}{12}$  (۱)       $\frac{29}{36}$  (۲)       $\frac{1}{5}$  (۳)       $\frac{4}{5}$  (۴)

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

○ تألیفی

در پرتاب همزمان دو تاس، احتمال آن که مجموع دو تاس کمتر از ۱۰ یا هر دو تاس فرد باشند؟

$$\frac{29}{36} (1)$$

$$\frac{31}{36} (2)$$

$$\frac{35}{36} (3)$$

$$\frac{23}{36} (4)$$

○ تألیفی

در پرتاب دو مکعب با کدام احتمال مجموع ارقام دو عدد رو شده مضرب ۳ یا ۹ می شود؟

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{13}{36} (2)$$

$$\frac{1}{2} (3)$$

$$\frac{11}{36} (4)$$

### پرتاب سه تاس

در پرتاب همزمان سه تاس احتمال این که:

● هر سه عدد رو شده مثل هم باشد؟

● هیچ یک از اعداد رو شده یکسان نباشد؟

● هر سه عدد رو شده زوج باشند؟

● هر سه عدد رو شده کمتر از ۵ باشند؟

○ تألیفی

در پرتاب سه تاس، احتمال آن که دو بار ۵ بیاید، کدام است؟

$$\frac{25}{72} (1)$$

$$\frac{25}{216} (2)$$

$$\frac{5}{72} (3)$$

$$\frac{5}{216} (4)$$

○ تألیفی

در پرتاب سه تاس، احتمال آن که حداقل یک بار ۵ ظاهر شود، کدام است؟

$$\frac{90}{216} (1)$$

$$\frac{107}{216} (2)$$

$$\frac{108}{216} (3)$$

$$\frac{91}{216} (4)$$

○ تألیفی

در پرتاب سه تاس، احتمال آن که حداکثر ۲ بار عدد فرد بیاید، کدام است؟

$$\frac{3}{4} (1)$$

$$\frac{5}{8} (2)$$

$$\frac{7}{8} (3)$$

$$\frac{5}{6} (4)$$

○ تألیفی

سه تاس را با هم پرتاب می کنیم. با کدام احتمال اعداد رو شده، لااقل در دو تاس یکسان هستند؟

$$\frac{1}{3} (1)$$

$$\frac{4}{9} (2)$$

$$\frac{5}{9} (3)$$

$$\frac{11}{18} (4)$$

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

### مجموع سه تاس



۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱
۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰

### تألیفی

تاسی را سه بار می‌اندازیم. چه قدر احتمال دارد که مجموع اعداد رو شده سه تاس کوچک تر از ۵ باشد؟

$$\frac{1}{24}(4) \quad \frac{1}{108}(3) \quad \frac{1}{64}(2) \quad \frac{1}{54}(1)$$

### تألیفی

سه تاس را با هم پرتاب میکنیم. احتمال آنکه حاصل جمع سه عدد رو شده حداقل برابر ۷ باشد، کدام است؟

$$\frac{47}{105}(4) \quad \frac{43}{105}(3) \quad \frac{5}{54}(2) \quad \frac{49}{54}(1)$$

### تألیفی

در پرتاب سه تاس، احتمال این که مجموع سه تاس، عددی فرد باشد، کدام است؟

$$\frac{1}{8}(4) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{5}{108}(2) \quad \frac{1}{2}(1)$$

### خ انسانی ۰۰

در یک بازی ۱۶ نفره به هر نفر یکی از شماره های ۳، ۴، ۵، ...، ۱۸ را تخصیص می‌دهیم. سه تاس را پرتاب می‌کنیم و اعداد رو شده را با یکدیگر جمع می‌کنیم. شخصی که آن شماره را داشته باشد، انتخاب می‌شود. احتمال این که شخص صاحب شماره ۱۰ انتخاب شود، کدام است؟

$$\frac{1}{7}(4) \quad \frac{1}{8}(3) \quad \frac{1}{9}(2) \quad \frac{1}{10}(1)$$

### مثال

در پرتاب همزمان سه تاس احتمال این که:

● مجموع اعداد رو شده ۱۶ باشد.

● مجموع اعداد رو شده مضرب ۵ باشد.

● مجموع عدد اول کمتر از ۱۳ باشد.



# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

### فرزند و سکه جایگاه نامعلوم

مثال

سکه ای را ..... می پرتابیم احتمال این که:

بار ۲	بار ۳	بار ۴	بار ۵
r: ۰ ۱ ۲ p: ۲ ۱ ۰	r: ۰ ۱ ۲ ۳ p: ۳ ۲ ۱ ۰	r: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ p: ۴ ۳ ۲ ۱ ۰	r: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ p: ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

● دوبار پشت بیاید؟

P=      P=      P=      P=

● تعداد آمدن پشت و رو برابر باشد؟

P=      P=      P=      P=

● لااقل یکبار رو و حداکثر یک بار پشت؟

P=      P=      P=      P=

● حداکثر یکبار رو یا حداکثر یک بار پشت؟

P=      P=      P=      P=

### فرزند و سکه جایگاه معلوم

خانواده ای دارای ۵ فرزند است با چه احتمالی:

● فرزند اول و دوم پسر است؟

● فقط فرزند اول و دوم پسر است؟

● فرزند آخر دختر است؟

● فقط فرزند آخر دختر است؟

خانواده ای دارای ۲ فرزند است

$$n(S) = 2^2 = 4$$

b: ۰ ۱ ۲  
g: ۲ ۱ ۰

خانواده ای دارای ۳ فرزند است

$$n(S) = 2^3 = 8$$

b: ۰ ۱ ۲ ۳  
g: ۳ ۲ ۱ ۰

خانواده ای دارای ۴ فرزند است

$$n(S) = 2^4 = 16$$

b: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴  
g: ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

خانواده ای دارای ۵ فرزند است

$$n(S) = 2^5 = 32$$

b: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵  
g: ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

مثال

خانواده ای دارای ..... است با چه احتمالی:

فرزند ۲	فرزند ۳	فرزند ۴	فرزند ۵
b: ۰ ۱ ۲ g: ۲ ۱ ۰	b: ۰ ۱ ۲ ۳ g: ۳ ۲ ۱ ۰	b: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ g: ۴ ۳ ۲ ۱ ۰	b: ۰ ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ g: ۵ ۴ ۳ ۲ ۱ ۰

● یک فرزند دختر دارد؟

P=      P=      P=      P=

● تعداد فرزندان پسر بیشتر از دختر؟

P=      P=      P=      P=

● فرزندان همجنس هستند؟

P=      P=      P=      P=

● هم فرزند پسر و هم فرزند دختر دارد؟

P=      P=      P=      P=

● حداقل یک فرزند پسر دارد؟

P=      P=      P=      P=

● حداکثر دو فرزند دختر دارد؟

P=      P=      P=      P=

## فصل: آمار و احتمال

### درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

#### احتمال شرطی

در پرتاب یک تاس: 

۱	۳	۵
۲	۴	۶

● احتمال اول آمدن؟

- اگر عدد رو شده زوج باشد، احتمال اول آمدن؟
- می دانیم عدد رو شده زوج است، احتمال اول آمدن؟
- احتمال اول آمدن، به شرطی که عدد رو شده زوج باشد؟

#### مثال

از کیسه ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه، مهره ها را یکی یکی بیرون می آوریم. اگر مهره اول سفید باشد با چه احتمالی مهره دوم نیز سفید است؟

#### مثال

از کیسه ای شامل ۴ مهره سفید و ۵ مهره سبز و ۶ مهره آبی یک مهره بیرون می آوریم. اگر این مهره سبز نباشد، با چه احتمالی سفید است؟

#### تألیفی

از میان کارت های ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، ۹، سه کارت به صورت تصادفی برمیداریم. اگر جمع شماره های این ۳ کارت فرد باشد، با چه احتمالی هر سه فرد اند؟

#### تألیفی

اعداد ۱ تا ۹ را روی نه کارت می نویسیم و ۳ کارت را به تصادف انتخاب می کنیم. احتمال این که هر سه عدد زوج باشد به شرط این که مجموع آن ها زوج باشد؟

#### مثال

در پرتاب دو تاس با هم:

● می دانیم جمع دو عدد رو شده کمتر از ۱۰ است، با کدام احتمال هر دو عدد رو شده فرد اند؟

● می دانیم هر دو عدد فرد ظاهر شده اند. با کدام احتمال مجموع اعداد کمتر از ۱۰؟

#### ریاضی ۹۱

در پرتاب دو تاس اگر حاصل جمع شماره های رو شده کمتر از ۶ باشد، احتمال آنکه حداقل یکی از تاس های رو شده ۲ باشد؟

$$\frac{1}{11}(1) \quad \frac{2}{11}(2) \quad \frac{3}{11}(3) \quad \frac{4}{11}(4)$$

$$\frac{1}{19}(1) \quad \frac{2}{19}(2) \quad \frac{3}{19}(3) \quad \frac{4}{19}(4) \quad \frac{1}{3}(1) \quad \frac{2}{5}(2) \quad \frac{1}{4}(3) \quad \frac{3}{5}(4)$$

### احتمال اشتراک و اجتماع (مستقل، ناسازگار) فقط با نمودار ون حرف آخر

احتمال شرطی  $P(A|B)$  و دو پیشامد مستقل  $A$  و  $B$



احتمال قبولی بیژن:  $1/8$  ↓ احتمال قبولی عباس:  $1/7$

- $P(A|B) =$
- $P(A'|B) =$
- $P(A|B') =$
- $P(A'|B') =$

#### مثال

$A$  و  $B$  و  $C$  سه پیشامد از پرتاب یک تاس اند. استقلال پیشامدهای زیر؟

$$A = \{2, 4, 6\} \quad B = \{1, 4, 5, 6\} \quad C = \{1, 2\}$$

A, B

A, C

B, C

اینوووووووو بادتونه

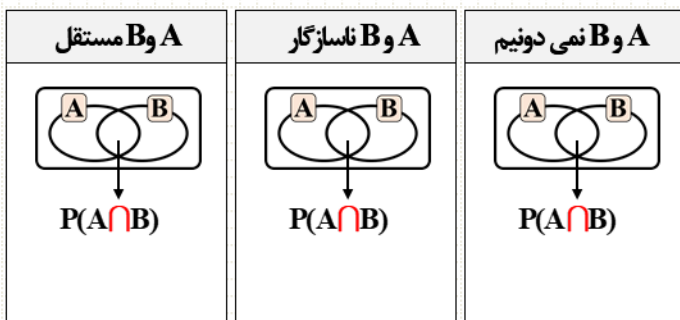
$$P(A \cap B) = P(A|B) \times P(B)$$

$$P(B \cap A) = P(B|A) \times P(A)$$

و  $A$  و  $B$  مستقل اند

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

### احتمال اشتراک دو پیشامد



#### تألیفی

اگر در پرتاب دو تاس جمع ارقام رو شده عددی اول باشد، با کدام احتمال اختلاف ارقام زوج است؟

$$\frac{1}{15} \quad \frac{1}{14} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{10}$$

#### مثال

خانواده ای دارای چهار فرزند است.  $b: \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \circ & \circ & \circ & \circ \end{matrix}$  می‌دانیم:  $g: \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{matrix}$

● لاقل یک فرزند دختر است. با کدام احتمال، ۳ تا از فرزندان دختر است؟

● حداکثر دو فرزند دختر است. با کدام احتمال، دو تا از فرزندان، دخترند؟

● لاقل یکی پسر و لاقل یکی دختر است. با کدام احتمال، تعداد دختر و پسر برابرند؟

● تعداد پسر و دختر نابرابرند. با کدام احتمال، تعداد دختر بیشتر از پسر است؟

● تعداد پسر از دختر ناکمتر است. با کدام احتمال، تعداد پسر بیشتر از دختر است؟

#### مثال

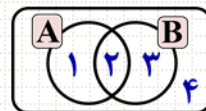
در پرتاب یک تاس:  $S = \begin{matrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{matrix}$

● احتمال اول آمدن؟ به شرطی که بدانیم عدد رو شده زوج است؟

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

### احتمال اجتماع دو پیشامد



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



ناسازگار:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

مستقل:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$

نمی دهنم:  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A|B) \times P(B)$

#### مثال

اگر A و B دو پیشامد ..... و  $P(B) = \frac{3}{4}$  و  $P(A) = \frac{1}{4}P(B)$  باشد، احتمال:

مستقل	ناسازگار

● هر دو با هم رخ دهند.

$P =$  فقط A دهد. ●

$P =$  فقط یکی رخ دهد. ●

$P =$  هیچ کدام رخ ندهند. ●

$P =$  حداقل یکی رخ دهد. ●

$P =$  حداکثر یکی رخ دهد. ●

#### مثال

احتمال وقوع پیشامد A برابر  $\frac{3}{4}$  و احتمال وقوع پیشامدهای A یا B برابر  $\frac{7}{8}$  است. اگر A و B دو پیشامد ..... باشند، احتمال این که B رخ ندهد؟

ناسازگار

مستقل

#### مثال

احتمال قبولی احمد در کنکور  $\frac{7}{10}$  و احتمال قبولی اش در آیلتس  $\frac{8}{10}$  است. وی در هر دو آزمون شرکت کرده، احتمال این که:

● در هر دو آزمون قبول شود؟

● فقط در کنکور قبول شود؟

● فقط در یک آزمون قبول شود؟

● در هیچ آزمونی قبول نشود؟

● حداقل در یک آزمون قبول شود؟

● حداکثر در یک آزمون قبول شود؟

#### مثال

دو پیشامد A و B ناسازگار هستند و  $P(A) = \frac{2}{5}P(B)$ ، اگر  $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$  احتمال

● A رخ دهد.

● A رخ ندهد.

● B رخ دهد.

● B رخ ندهد.

● نه A رخ دهد و نه B

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۲: احتمال

### تألیفی

اگر  $P(A) = \frac{1}{4}$  و  $P(B) = \frac{1}{5}$  و  $P(A|B) = \frac{1}{8}$  باشد،  $P(B' - A')$  کدام است؟

- ۰/۴۳(۱)      ۰/۴(۲)      ۰/۵(۳)      ۰/۲(۴)

### تألیفی

اگر  $P(A) = ۰/۷$  و  $P(B) = ۰/۲$  و  $P(A \cap B') = ۰/۶$  باشد، حاصل  $P(B|A')$  کدام است؟

- $\frac{۴۳}{۱۴۰}$ (۱)       $\frac{۴۱}{۱۴۰}$ (۲)       $\frac{۳۷}{۱۴۰}$ (۳)       $\frac{۳۱}{۱۴۰}$ (۴)

### تألیفی

در یک مسابقه اتومبیل رانی احتمال این که یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان برسد برابر ۰/۷ و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود برابر ۰/۸ می باشد اگر بدایم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

- $\frac{1}{4}$ (۱)       $\frac{1}{6}$ (۲)       $\frac{1}{3}$ (۳)       $\frac{1}{4}$ (۴)

### تألیفی

اگر  $P(B) = ۰/۴$  و  $P(A|B') = ۰/۷$  باشد، آنگاه حاصل  $P(A \cup B)$  کدام است؟

- $\frac{1}{8}$ (۱)       $\frac{3}{8}$ (۲)       $\frac{5}{8}$ (۳)       $\frac{7}{8}$ (۴)

### مثال

یک سکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال:

● سکه رو و تاس مضرب ۳ میاد؟

● سکه پشت و تاس زوج میاد؟

- ۰/۷۸(۱)      ۰/۸۰(۲)      ۰/۸۲(۳)      ۰/۸۵(۴)

### تألیفی

فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال رقیب اصلی اش را ببرد  $\frac{1}{8}$  و احتمال قهرمانی اش  $\frac{1}{4}$  و احتمال قهرمانی به شرط بردن اصلی ترین رقیب  $\frac{1}{4}$  است. با کدام احتمال حداقل یکی از دو اتفاق قهرمان شدن یا بردن اصلی ترین رقیب برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

- $\frac{11}{16}$ (۴)       $\frac{5}{16}$ (۳)       $\frac{3}{16}$ (۲)       $\frac{1}{16}$ (۱)

# فصل: آمار و احتمال

## درس ۳: چرخه آمار در حل مسائل

### مثال

دوسکه و یک تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال:

● هر دوسکه پشت و تاس عدد ۴ میاد؟

● هر دو سکه رو و تاس فرد میاد؟

### احتمال مسائل تولد

سه نفر به نام های a, b, c در یک مهمانی حضور دارند. با چه احتمالی:

● هر سه نفر در یک فصل متولد شده اند؟

● هر سه نفر در فصل های مختلفی متولد شده اند؟

### تألیفی

بر روی یک نیمکت ۳ دانش آموز نشسته اند. با کدام احتمال حداقل دو نفر از آن ها در یک روز هفته به دنیا آمده اند؟

### خ انسانی ۹۹

در پرتاب یک تاس و دوسکه، احتمال این که لاقط یکی از سکه ها پشت و عدد رو شده در تاس فرد باشد؟

$$\frac{30}{49}(4) \quad \frac{29}{49}(3) \quad \frac{19}{49}(2) \quad \frac{20}{49}(1) \quad \frac{5}{8}(4) \quad \frac{7}{8}(3) \quad \frac{5}{12}(2) \quad \frac{3}{8}(1)$$

### خ تجربی ۹۲

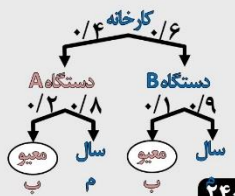
۴ دانش آموز یک کلاس بر یک نیمکت نشسته اند با کدام احتمال ماه تولد حداقل دو نفر آنان یکسان است؟

### تألیفی

در پرتاب همزمان چهار سکه یکسان و دو تاس، با کدام احتمال حداقل دو سکه رو یا مجموع اعداد رو شده دو تاس، مضرب ۴ است؟

$$\frac{55}{96}(4) \quad \frac{23}{48}(3) \quad \frac{41}{96}(2) \quad \frac{19}{48}(1) \quad \frac{7}{32}(4) \quad \frac{11}{32}(3) \quad \frac{41}{64}(2) \quad \frac{49}{64}(1)$$

### احتمال کل:



۲۴۰

- احتمال ساده
- قوانین احتمال
- احتمال شرطی، احتمال در پیشامدهای مستقل، میکس
- قانون احتمال کل

۲۴۱

**مثال:** یک سکه را پرتاب می کنیم، اگر پشت بیاید ۳ سکه دیگر را با هم پرتاب می کنیم. در این آزمایش احتمال اینکه دقیقاً یک سکه رو ظاهر شود، کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 5 \\ 16 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 16 \end{pmatrix} (3)$$

۲۴۲

**مثال:** دو جعبه داریم. درون یکی از آن ها ۱۲ لامپ قرار دارد که ۶ تا از آن ها معیوب اند و جعبه دیگر شامل ۹۶ لامپ، که ۴ تا از آن ها معیوب اند. به تصادف جعبه ای انتخاب کرده یک لامپ از آن بیرون می آوریم. چقدر احتمال دارد لامپ مورد نظر معیوب باشد؟

$$\frac{13}{48} (4) \quad \frac{19}{96} (3) \quad \frac{29}{96} (2) \quad \frac{19}{48} (1)$$

۲۴۳

**سرد ۹۶:** در یک شهر صنعتی ۶۰ درصد جمعیت مرد و ۴۰ درصد آن زن هستند. اگر ۱۸ درصد مردان و ۱۲ درصد زنان تحصیلات دانشگاهی داشته باشند چند درصد این جمعیت تحصیلات دانشگاهی دارند؟

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \end{pmatrix} (2) \\ \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \end{pmatrix} (3) \\ \begin{pmatrix} 16 \\ 2 \end{pmatrix} (4)$$

۲۴۴

**مثال:** رامتین از بین ۱۰۰ سؤال دو گزینه ای (بله - خیر) جواب صحیح ۳۰ تای آن ها را می داند. یک سؤال تصادفی از بین این ۱۰۰ سؤال به رامتین داده ایم. اگر پاسخ به سؤال اجباری باشد، با چه احتمالی رامتین پاسخ صحیح می دهد؟

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 75 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 65 \end{pmatrix} (4)$$

۲۴۵

**مثال:** در پرتاب یک تاس اگر عدد مرکب ظاهر شود، مجاز به پرتاب تاس دوم هستیم. در غیر این صورت دو سکه پرتاب می کنیم. با کدام احتمال لاقط یک سکه «رو» ظاهر می شود؟

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} (1) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4)$$

۲۴۶

**مثال:** در پرتاب یک تاس می داریم عدد اول ظاهر شده است. اگر زوج بیاید سه سکه پرتاب می کنیم، در غیر این صورت دو سکه پرتاب می کنیم. با کدام احتمال فقط یک سکه «رو» ظاهر می شود؟

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 48 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 48 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 24 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 24 \end{pmatrix} (1)$$

۲۴۷

**مثال:** فضای نمونه ای S از دو پیشامد ناسازگار  $E_1$  و  $E_2$  تشکیل شده است. که  $P(E_1) = 0.8$  و  $P(E_2) = 0.5$  و  $P(E_1 \cap E_2) = 0.4$  احتمال وقوع پیشامد دلخواه E کدام است؟

$$\begin{pmatrix} 25 \\ 36 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 36 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 7 \\ 18 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 11 \\ 18 \end{pmatrix} (3)$$

۲۴۸

**مثال:** اگر احتمال انتقال نوعی بیماری خاص به نوزاد پسر ۰.۰۸ و نوزاد دختر ۰.۰۲ باشد و خانواده ای قصد بچه دار شدن داشته باشد به چه احتمالی نوزاد آن ها به بیماری مذکور مبتلا خواهد شد؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 54 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 45 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 55 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 55 \end{pmatrix} (3)$$

۲۴۹

**سرد ۸۹:** احتمال انتقال بیماری مسری به افرادی که واکسن زده اند ۰.۲۵ و احتمال انتقال به افراد دیگر ۰.۲ است.  $\frac{1}{5}$  کارگران یک کارگاه واکسن زده اند. اگر فرد حامل بیماری به تصادف با یکی از کارگران ملاقات کند، با کدام احتمال، این بیماری منتقل می شود؟

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 14 \\ 15 \end{pmatrix} (2) \\ \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \end{pmatrix} (3) \\ \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \end{pmatrix} (4)$$

۲۵۰

**سرخ ۹۸:** بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش های ۵ بسته ریاضی، ۷ بسته تجربی و ۶ بسته علوم انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب  $0.7$ ،  $0.8$  و  $0.9$  می باشد. با کدام احتمال، بهروز برنده می شود؟

$$\begin{pmatrix} 21 \\ 36 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 30 \\ 36 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 29 \\ 36 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 25 \\ 36 \end{pmatrix} (1)$$

۲۵۱

**مثال:** سامان جهت مشارکت در یک مسابقه از بین پرسش های ۲ بسته ریاضی، ۶ بسته ادبیات و ۴ بسته اطلاعات عمومی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به ترتیب  $0.6$ ،  $0.9$  و  $0.85$  می باشد. با کدام احتمال، سامان برنده می شود؟

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} (3) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} (1)$$

۲۵۲

**مثال:** فرض کنید جمعیت یک کشور متشکل از ۲۰٪ کودک و نوجوان، ۵۰٪ میانسال و ۳۰٪ سالمند باشند و شیوع یک بیماری خاص در این دسته ها به ترتیب ۳٪، ۵٪ و ۱٪ باشد. اگر فردی به تصادف از این جامعه انتخاب شود، با کدام احتمال به بیماری مورد نظر مبتلا است؟

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 34 \end{pmatrix} (2) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \end{pmatrix} (1) \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 38 \end{pmatrix} (4) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 36 \end{pmatrix} (3)$$

۲۵۳





# ریاضی جامع (۳) گام ۳

**نتیجه تشابه:**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{h}{h'} = \frac{m}{m'} = \frac{P}{P'} = k \quad \frac{S}{S'} = k^2$$

**تشابه و هم‌نهشتی**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = 1 \quad \frac{S}{S'} = 1 \quad \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k \quad \frac{S}{S'} = k^2$$

- طول، مساحت: تشابه و هم‌نهشتی
- طول، مساحت: انواع تشابه
- طول: قضیه تالس
- طول: ضریب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: مثلث ۶،۳ ضلعی منتظم

**درس هندسه**

**سده ۹۰:** در یک مثلث قائم الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. اگر مساحت مثلث کوچکتر  $\frac{1}{2}$  مساحت مثلث اصلی باشد، نسبت فواصل پای ارتفاع از دو ضلع قائم آن کدام است؟

**سرخ ۹۵:** درون مثلثی به اضلاع ۹ و ۷ و ۵ واحد، مثلث دیگر طوری رسم می‌کنیم که اضلاع آن موازی اضلاع مثلث اصلی باشد اگر بزرگترین ضلع این مثلث ۶ واحد باشد، مساحت محدود به این دو مثلث، چند برابر مساحت مثلث کوچک تر است؟

(۱)  $\frac{1}{75}$   
(۲) ۱  
(۳)  $\frac{1}{25}$   
(۴)  $\frac{1}{5}$

**سرخ ۸۶:** در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها  $\frac{2}{3}$  نسبت اضلاع است. مساحت مثلث بزرگ تر چند برابر مساحت مثلث کوچک تر است؟

**مثال:** مساحت شکلها را با هم مقایسه کنید.

**نسبت مساحت دو مثلث**

$$\frac{S}{S'} = k^2 \quad \frac{S}{S'} = \frac{h}{h'} \quad \frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$$

**سده ۹۱:** در مثلث  $ABC$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ارتفاع  $AH$  مثلث مفروض را به دو جزء تقسیم می‌کند. مساحت مثلث اصلی  $\frac{6}{76}$  برابر مساحت مثلث کوچک تر است. نسبت فواصل  $AH$  از دو ضلع قائم کدام است؟

**درونی، بیرونی، موازی**

**درونی، بیرونی، موازی**

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

- طول، مساحت: تشابه و هم‌نهشتی
- طول، مساحت: انواع تشابه
- طول: قضیه تالس
- طول: ضریب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: مثلث ۶،۳ ضلعی منتظم

**سرخ ۸۷:** در چهار ضلعی  $BCDE$  زاویه های رو به رو به رو مکمل همدند. اگر  $BC = 20$  و  $DE = 12$ ، آنگاه مساحت چهار ضلعی چند برابر مساحت مثلث  $ABC$  است؟

**مثال:** در شکل زیر، مساحت چهارضلعی چند درصد مساحت بزرگترین مثلث است.

**مثال:** در شکل زیر، مساحت مثلث  $OAB$  چند درصد مساحت مثلث  $OCD$  است.

**مثال:** با توجه به شکل زیر حاصل  $\frac{S_{\triangle ACE}}{S_{\triangle BDE}}$  را بیابید.

**سرسری ۹۱:** در شکل روبرو دو زاویه  $\hat{A}$  و  $\hat{B}$  قائمه‌اند. مقدار  $x$  چقدر است؟

**سرسری:** در شکل روبرو ۳ مربع به اضلاع واحد کنار همند. فاصله  $MA$  چند برابر  $\sqrt{10}$  است؟

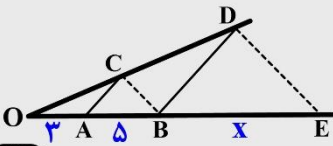
**مثال:** اگر  $AB = 35$  باشد، مقدار  $S_{\triangle BDE}$  را بیابید.

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} = \frac{c}{d} \quad ad = bc$$

- طول، مساحت: تشابه و هم‌نهشتی
- طول، مساحت: انواع تشابه
- طول: قضیه تالس
- طول: ضریب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: مثلث ۶،۳ ضلعی منتظم

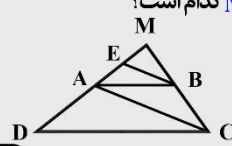
**مثال:** اگر  $AB = 35$  باشد، مقدار  $S_{\triangle BDE}$  را بیابید.

سرخ ۹۴: در شکل روبه رو، دو جفت پاره خط موازی اند.  $OA=3$  و  $AB=5$ ، اندازه  $BE$ ، کدام است؟



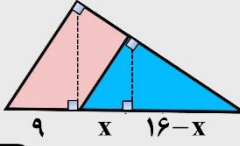
۲۲

سراسری ۹۳: در دوزنقه  $ABCD$ ، پاره خط  $BE$  موازی قطر  $AC$  است. اگر  $AD=7$  و  $AE=3$  باشد، اندازه ضلع  $MD$  کدام است؟



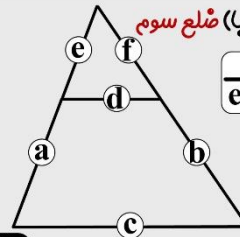
۲۳

تست کنکور: در شکل مقابل، ارتفاع هر سه مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه  $x$  کدام است؟



۲۲

نوشتن نسبت بدون (با) ضلع سوم



$$\frac{e}{e+a} = \frac{f}{f+b} = \frac{d}{c}$$

$$\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$$

۲۵

- طول، مساحت: تشابه و همبستگی
- طول، مساحت: مثلث متساوی الساقین
- طول، مساحت: انواع تشابه
- طول، مساحت: ۸، ۴ ضلعی منتظم
- طول، قضیه تالس
- طول، مساحت: دوزنقه
- طول: ضریب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: ۶، ۳ ضلعی منتظم

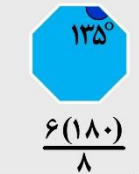
۶۰

اندازه زاویه داخلی یک n ضلعی منتظم

۵ ضلعی منتظم

۶ ضلعی منتظم

۸ ضلعی منتظم



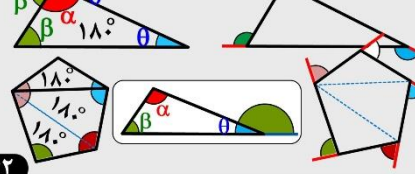
۶۳

مجموع زوایای داخلی

$$(n-2)180^\circ$$

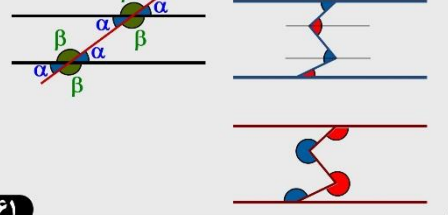
مجموع زوایای خارجی

$$360^\circ$$



۶۲

خطوط موازی و مورب



۶۱

**مثال:** زوایای خارجی مثلثی با اعداد ۲، ۳ و ۴ متناسب اند. اندازه کوچک ترین زاویه داخلی مثلث را بیابید؟

۶۴

**سراسری ۹۳:** در مثلث متساوی الساقین ABC قاعده BC را از هر دو طرف به اندازه ساق ها تا نقاط D و E امتداد می دهیم. در مثلث ADE کوچکترین زاویه خارجی چند برابر کوچک ترین زاویه داخلی آن است؟

۶۵

**سد ۹۶:** در چهارضلعی محدب ABCD رابطه  $\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{D}{12}$  بین زاویه ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مقابل A و C، چند درجه است؟ (۱) ۲۰ (۲) ۲۵ (۳) ۳۰ (۴) ۳۵

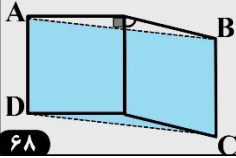
۶۶

**سرخ ۹۶:** در چهارضلعی محدب ABCD رابطه  $\frac{A}{4} = \frac{B}{5} = \frac{C+D}{11}$  بین زاویه ها برقرار است. زاویه حاده بین نیمسازهای داخلی دو زاویه مجاور A و B، چند درجه است؟ (۱) ۵۰ (۲) ۶۰ (۳) ۷۰ (۴) ۷۵

۶۷

**سد ۸۸:** در شکل مقابل، یک مربع و یک لوزی با زاویه ۶۰ درجه، در یک ضلع مشترک اند. بزرگ ترین زاویه متوازی الاضلاع ABCD چند درجه است؟

۶۸

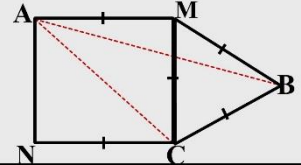


**سرخ ۸۶:** مربع و مثلث متساوی الاضلاع درون مربع، در یک ضلع مشترک اند. در مثلث غیر قائمه الزویه که دو ضلع آن به ترتیب قطر مربع و ضلع مثلث متساوی الاضلاع است. زاویه بزرگ تر چند برابر زاویه کوچک تر است؟

۶۹

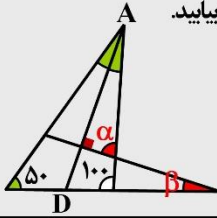
**سرخ ۸۸:** در شکل مقابل، بر روی ضلع مربع مفروض، مثلث متساوی الاضلاع ساخته شده است. در مثلث ABC بزرگ ترین زاویه چند برابر کوچک ترین زاویه آن است؟

۷۰



**مثال:** در شکل زیر AD نیمساز زاویه A است. زوایای  $\alpha$  و  $\beta$  را بیابید.

۷۱



**سد ۹۱:** در مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) در رأس A خط عمود بر AC نیمساز زاویه داخلی C را در D قطع می کند. اگر M محل تلاقی نیمسازهای داخلی مثلث مفروض باشد، AD برابر کدام است؟

۷۲

$$\frac{MD}{AC} = \frac{AM}{MC}$$

**سد ۹۴:** در مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) قاعده BC را به اندازه ساق تا نقطه D امتداد می دهیم. اگر زاویه خارجی رأس A از مثلث ABD برابر ۱۰۲ درجه باشد، کوچکترین زاویه مثلث ABC، چند درجه است؟

۷۳

- ۳۴ (۱)
- ۳۸ (۲)
- ۴۲ (۳)
- ۴۴ (۴)

**سرخ ۹۳:** در مثلث ABC از رأس C خطی بر CA عمود کرده و بر روی آن CD=CB را طوری جدامیکنیم که BD ضلع AC را قطع کند. زاویه DBC ؟

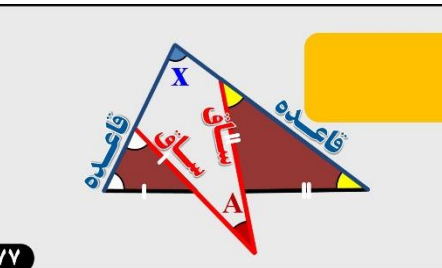
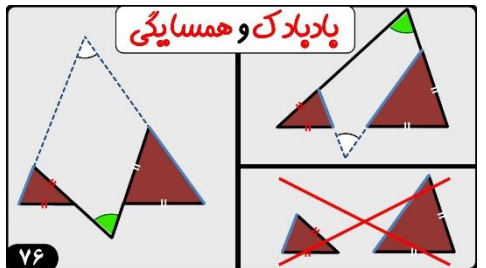
۷۴

**سرخ ۹۱:** در مثلث متساوی الساقین ABC (AB=AC) ساق AB را به اندازه BD=BC امتداد می دهیم. اگر CD برابر AC باشد، زاویه A چند درجه است؟

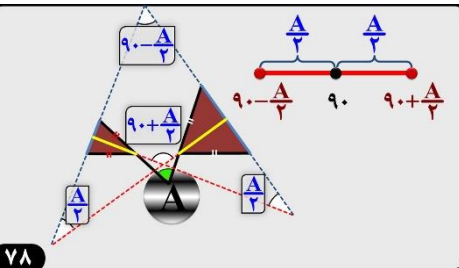
۷۵

**پادبادک و همسایگی**

۷۶



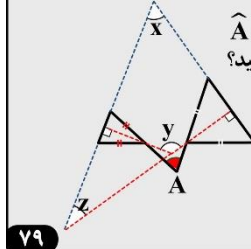
۷۷



۷۸

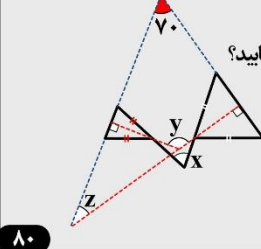
**مثال:** در شکل زیر  $\hat{A} = 60^\circ$  مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۷۹



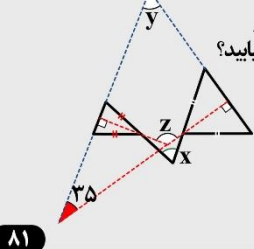
**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۸۰



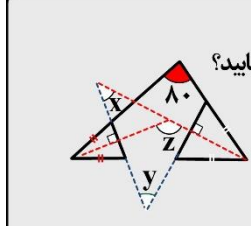
**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۸۱



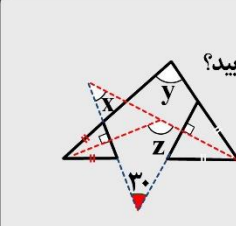
**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۸۲



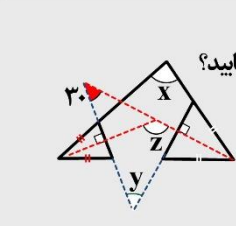
**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۸۳



**مثال:** با توجه به شکل زیر مقدار زوایای x, y, z را بیابید؟

۸۴

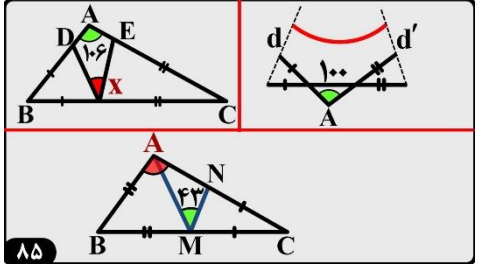


**تست کنکور:** در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 108^\circ$ ، ضلع  $BC$  را از هر دو طرف به اندازه های  $BD=BA$  و  $CE=CA$  امتداد می دهیم. کوچکترین زاویه خارجی مثلث  $ADE$  چند درجه است؟

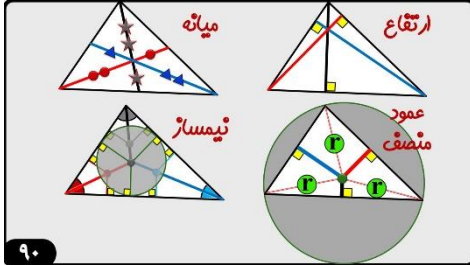
۸۷

**تست کنکور:** در مثلث  $ABC$  بر روی ضلع  $BC$  پاره خط های  $BM=BA$  و  $CN=CA$  را جدا می کنیم. اگر  $\hat{A} = 72^\circ$  باشد، زاویه  $\widehat{MAN}$  چند درجه است؟

۸۶



۸۵



۹۰

- طول، مساحت: تشابه و همبستگی
- طول، مساحت: انواع تشابه
- طول، مساحت: قضیه تالس
- طول: ضرب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: مثلث ۶، ۳: ضلعی منتظم

۸۹

**سؤال ۹۲:** در مثلث  $ABC$  داریم  $AB=AC$  و  $\hat{A} = 80^\circ$  عمود منصف های دو ساق مثلث، قاعده  $BC$  را در  $M$  و  $N$  قطع می کند. کوچکترین زاویه مثلث  $AMN$  چند درجه است؟

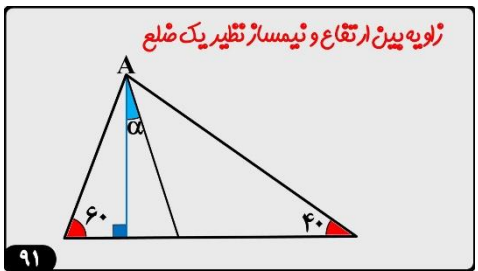
۸۸

**مثل:** در یک مستطیل به اضلاع ۴ و ۶ عمود منصف قطر مستطیل امتداد عرض را در  $M$  قطع می کند. فاصله  $M$  از یکی از دو سر پاره خط کدام است؟

۹۳

**سؤال ۸۷:** در مثلثی به طول اضلاع ۱۳ و ۱۳ و ۱۰ واحد فاصله نقطه ی تلاقی میانه ها از دورترین رأس آن کدام است؟

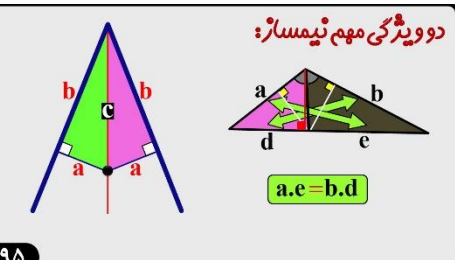
۹۲



۹۱

**مثل:** مطابق شکل مقابل  $BD=12$ ،  $AC=27$ ،  $\frac{AB}{DC} = 4$  است. محیط مثلث کدام است؟

۹۶



۹۵

**مثل:** در مثلث قائم الزاویه ای به اضلاع قائم ۶ و ۲ عمود منصف وتر امتداد ضلع کوچک تر را در  $M$  قطع می کند. فاصله  $M$  از نزدیک ترین رأس مثلث کدام است؟ (س ۸۴)

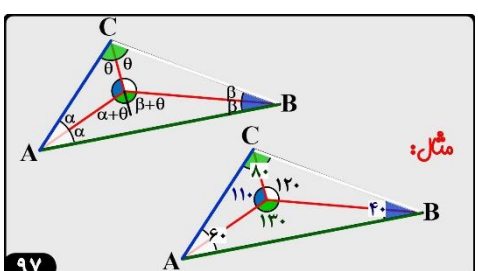
۹۴

**مثل:** دوزنقه متساوی الساقین  $ABCD$  با اندازه ساق ۴ واحد مفروض است. نقطه  $O$  محل برخورد نیمساز های زوایای داخلی  $A$  و  $D$  است. اگر مساحت مثلث  $AOD$  برابر ۳ واحد مربع باشد از تقاطع دوزنقه کدام است؟

۹۹

**سؤال ۹۷:** در مثلث  $ABC$  نیمساز های زاویه داخلی، در نقطه  $O$  متقاطع اند. اگر زاویه های  $\angle AOB$  و  $\angle BOC$  و  $\angle COA$  متناسب با اعداد ۷ و ۶ و ۵ باشند بزرگترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

۹۸



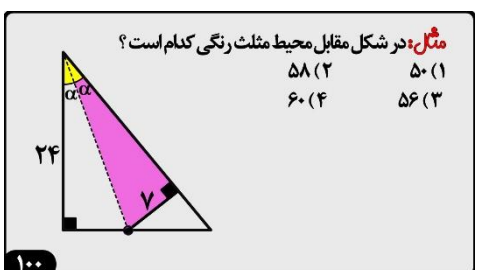
۹۷

**مثل:** مطابق شکل مقابل اختلاف مساحت دو مثلث  $ABC$  و  $CBD$  کدام است؟

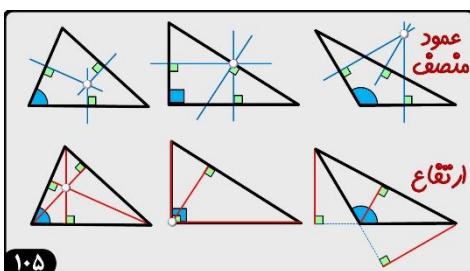
۱۰۲

**مثل:** مطابق شکل مقابل مساحت مثلث رنگ شده کدام است؟

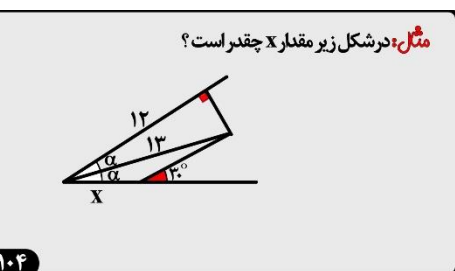
۱۰۱



۱۰۰



۱۰۵



۱۰۴

**مثل:** در شکل روبه رو مقدار  $X$  کدام است؟

۱۰۳

**ارتفاع و مسیره‌های مثلث قائم الزاویه**

$y^2 = a'a$

$h^2 = a'a''$

۱۰۸

● طول، مساحت، تشابه و همنهشتی  
● طول، مساحت، انواع تشابه  
● طول، قضیه تالس  
● طول، ضریب تبدیل  
● مساحت، قضیه مساحت  
● زاویه، انواع زوایا  
● طول، مساحت، اجزاء فرعی مثلث  
● طول، مساحت، مثلث قائم الزاویه  
● طول، مساحت، ۶، ۳ ضلعی منتظم

۱۰۷

**مثلث** چند نقطه درون یک مثلث یافت می شود که از رأس های آن به یک فاصله باشند؟  
(۱) حداکثر یک (۲) یک (۳) سه (۴) بی شمار

۱۰۶

**سرخ ۸۹:** در مثلث  $ABC$ ،  $AC = \frac{\sqrt{5}}{2} AB$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$  و ارتفاع  $AH$  و میانه  $AM$  رسم شده اند. مساحت مثلث  $ABC$  چند برابر مساحت مثلث  $AMH$  است؟

۱۱۱

**سرخ ۸۹:** در مثلث قائم الزاویه ای طول اضلاع قائم  $3$  و  $\sqrt{7}$  است. ارتفاع وارد بر وتر رسم شده است. فاصله پای قائم از وسط وتر، کدام است؟

۱۱۰

**مثلث قائم الزاویه و ارتفاع:** ۲ تا پده ۴ تا بگیر

$a^2 = d.c$

$b^2 = e.c$

$h^2 = d.e$

$h = \frac{a.b}{c}$

۱۰۹

**سرخ ۸۹:** در شکل مقابل، ارتفاع هر دو مثلث قائم الزاویه رسم شده است. اندازه  $x$  کدام است؟

۱۱۴

**سرخ ۸۶:** در مستطیل به ابعاد  $13$  و  $6$  واحد، نقطه  $M$  بر روی ضلع بزرگ قرار دارد و خطوط واصل از  $M$  به دو رأس دیگر مستطیل، بر هم عمودند. فاصله نزدیک ترین رأس مستطیل از  $M$  کدام است؟

۱۱۳

**سرخ ۹۱:** در یک مثلث قائم الزاویه، طول اضلاع قائم به نسبت  $1$  و  $3$  و مساحت آن  $60$  واحد مربع است. ارتفاع وارد بر وتر چه قدر است؟

۱۱۲

**سرخ ۹۶:** در مستطیلی به طول اضلاع  $3$  و  $4$  واحد، از هر رأس متقابل، عمودی بر قطر دیگر این مستطیل رسم شده است. مساحت متوازی الاضلاع حاصل کدام است؟

۱۱۷

کی گفته ضریب تبدیل، فقط  $\sin \alpha$  و  $\cos \alpha$  هست!!!  
کی گفته باید زاویه  $\alpha$  معلوم باشه!!!

۱۱۶

**سرخ ۹۰:** در یک مستطیل به ابعاد  $1$  و  $2$  واحد، از انتهای یک قطر خطی بر آن قطر عمود می کنیم تا امتداد ضلع کوچکتر مستطیل را در  $M$  قطع کند. فاصله نقطه  $M$  اسر دیگر این قطر چند واحد است؟

۱۱۵

**ارتفاع وارد بر وتر در مثلث قائم الزاویه با زاویه  $15^\circ$**

$h = \frac{1}{4} a$

۱۲۰

**مثلث قائم الزاویه و میانه:**

۱۱۹

**مثلث قائم الزاویه و میانه:**

۱۱۸

**مثلث:** در شکل مقابل  $AM$  میانه بوده و رابطه  $\frac{MH}{MC} = \frac{1}{2}$  برقرار است. حاصل  $\cos^2 \alpha$  را بیابید.

۱۲۳

**سرخ ۹۳:** مساحت مثلث قائم الزاویه ای  $\frac{1}{2}$  مجذور وتر آن است. کوچک ترین زاویه این مثلث چند درجه است؟

۱۲۲

**سرخ ۹۳:** زاویه های یک مثلث متناسب با اعداد  $1$ ،  $5$  و  $6$  می باشند. کوچک ترین ارتفاع این مثلث چند برابر بزرگ ترین ضلع آن است؟

۱۲۱

**سرخ ۸۶:** در بزرگ ترین مثلث قائم الزاویه شکل مقابل، اندازه بزرگ ترین میانه کدام است؟

۱۲۶

**سرخ ۹۱:** در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  داریم  $AB = AC = 4$  و  $BC = 2\sqrt{7}$ . ضلع  $AC$  را به اندازه خود تا نقطه  $D$  امتداد می دهیم. اندازه  $BD$  کدام است؟

۱۲۵

**مثلث:** در مثلث متساوی الساقین  $ABC$  ضلع  $AC$  را از رأس  $A$  به اندازه خودش امتداد می دهیم تا به نقطه  $D$  برسیم. اگر  $(\frac{BH}{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2})$  آنگاه زاویه  $ADB$  چند درجه است؟

۱۲۴

**مثلت قائم الزاویه و نیمساز:**

$ax + bx = ab$

$a.e = b.d$

$\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$

۱۲۹

**سد ۹۲:** در مثلث قائم الزاویه ABC بر روی ضلع AB مربعی ساخته شده است. اگر دو مثلث سابه زده همنهشت باشند، مساحت دوزنقه چند برابر مساحت مربع است؟

۱۲۸

**سب ۹۳:** مساحت یک مثلث قائم الزاویه برابر با مساحت مربعی است که بر روی ضلع کوچک تر آن ساخته می شود. اندازه میانه وارد بر ضلع متوسط، چند برابر ضلع متوسط این مثلث است؟

۱۲۷

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه زیر، نیم ساز AD رسم شده است. مقدار پر مجهول را محاسبه کنید؟

۱۳۲

**سد ۹۵:** در مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم ۳ و ۷ واحد، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه کدام است؟

(۱)  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$

(۲)  $\frac{2}{1}$

(۳)  $\frac{2}{8}$

(۴)  $\frac{2}{1}\sqrt{2}$

۱۳۱

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائم a و b، طول نیمساز داخلی زاویه قائمه را بر حسب a و b محاسبه کنید؟

۱۳۰

**مثال:** در یک مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر برابر با یکی از اضلاع قائم می باشد. زاویه بین نیمساز و میانه وارد بر وتر چقدر است؟

۱۳۴

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه میانه وارد بر وتر برابر با یکی از اضلاع قائم می باشد. زاویه بین نیمساز و میانه وارد بر وتر چقدر است؟

۱۳۳

**مثال:** در مثلث قائم الزاویه شکل روبه رو نقطه همرسی نیمسازهاست. مساحت قسمت رنگی شکل را بیابید؟

۱۳۳

**سب ۸۷:** در داخل یک مربع به ضلع  $\sqrt{3}$  مثلث متساوی الاضلاعی به ضلع  $\sqrt{3}$  رسم می کنیم. مجموع فواصل مرکز مربع از اضلاع این مثلث کدام است؟

۱۳۸

**مثلت متساوی الاضلاع**

$h = h' + h'' + h'''$

$I_1 + I_2 + I_3 = a$

۱۳۷

محیط:  
ارتفاع:  
مساحت:  
فاصله مرکز ثقل تا راس:  
فاصله مرکز ثقل تا ضلع:  
مجموع فواصل یک نقطه درون مثلث از سه ضلع:  
مجموع طول پاره خطهایی که از یک نقطه درون، موازی با سه ضلع:

۱۳۶

محیط:  
مساحت:  
فاصله دو ضلع موازی:  
قطر کوچک و مساحت:  
قطر بزرگ و مساحت:  
مساحت دایره محیطی:  
مساحت دایره محاطی:  
نسبت مساحت دایره ها:  
اختلاف مساحت دایره ها:

۱۴۱

**سب ۸۷:** یک مثلث متساوی الاضلاع به سه مثلث هم نهشت تقسیم شده است. زاویه های هر مثلث هم نهشت کدام است؟

۱۴۰

**سد ۸۶:** مثلث متساوی الاضلاع به ضلع  $\sqrt{6}$  واحد را به سه مثلث همنهشت تقسیم کرده ایم. اندازه ضلع نابزرگ تر از یک مثلث همنهشت چه قدر است؟

۱۳۹

**سب ۹۵:** مساحت یک شش ضلعی منتظم، برابر  $9\sqrt{3}$  واحد مربع است، اندازه قطر کوچک آن، کدام است؟

(۱)  $2\sqrt{6}$

(۲)  $3\sqrt{2}$

(۳)  $2\sqrt{3}$

(۴) ۳

۱۴۲

**سب ۹۱:** قطر کوچک یک شش ضلعی منتظم، ضلع یک شش ضلعی منتظم جدید است. مساحت شش ضلعی جدید چند برابر شش ضلعی اولیه است؟

۱۴۲

**مثلت متساوی الساقین**

$\hat{\theta} = \frac{A}{2}$

۱۴۵

**سب ۸۹:** در شکل مقابل، چهار ضلعی ABCD دوزنقه ی قائم الزاویه است و  $CB = CE$  و مجموع فواصل نقطه M از دو خط CB و CE برابر کدام است؟

AB EB DE AD

۱۴۷

۱۴۶

۱۴۵

● طول، مساحت: تشابه و همنهشتی  
 ● طول، مساحت: انواع تشابه  
 ● طول: قضیه تالس  
 ● طول: ضریب تبدیل  
 ● مساحت: قضیه مساحت  
 ● زاویه: انواع زوایا  
 ● طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث  
 ● طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه  
 ● طول، مساحت: ۶،۳ ضلعی منتظم

۱۴۸

**واسطه (میانگین) هندسی بین دو عدد حقیقی:**  
 $b^2 = ac$   
 $a, b, c$   
**مثل:** طول ضلع مربعی را بیابید که قطرش واسطه هندسی بین مساحت و محیط آن باشد؟

۱۴۹

**سج ۸۵:** در مربعی به ضلع  $a$  کوچک ترین مربع ممکن را طوری محاط می کنیم که هر رأس مربع بر روی ضلع مربع اصلی قرار گیرد نسبت ضلع این مربع به ضلع مربع اصلی کدام است؟

۱۵۰

**سد ۸۵:** هر یک از رأس های یک مربع بر روی اضلاع مربع دیگری است. اگر نسبت مساحت این دو مربع  $\frac{17}{8}$  باشد، رأس مربع کوچک ضلع مربع بزرگ را به کدام نسبت تقسیم می کند؟

۱۵۱

**داستان هشت ضلعی ها:**  
 $S_{\text{هشت ضلعی}} = 4(1 + \sqrt{2})x^2$   
**مثل:** با حذف ۱ واحد از گوشه های مربعی یک هشت ضلعی منتظم ساخته شده است. مساحت هشت ضلعی کدام است؟

۱۵۲

**سد ۹۳:** طول ضلع یک مربع برابر محیط مثلث قائم الزاویه و متساوی الساقین به ضلع قائم ۲ واحد است. با حذف گوشه های این مربع بزرگ ترین هشت ضلعی منتظم ممکن داخل آن ساخته شده است. مساحت هشت ضلعی کدام است؟

۱۵۳

● طول، مساحت: تشابه و همنهشتی  
 ● طول، مساحت: انواع تشابه  
 ● طول: قضیه تالس  
 ● طول: ضریب تبدیل  
 ● مساحت: قضیه مساحت  
 ● زاویه: انواع زوایا  
 ● طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث  
 ● طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه  
 ● طول، مساحت: ۶،۳ ضلعی منتظم

۱۵۴

**تشابه (تبدیل ذوزنقه به مثلث):**  
 $\frac{e}{e+a} = \frac{f}{f+b} = \frac{d}{c} = \frac{h}{h+k}$   
 $\frac{e}{a} = \frac{f}{b}$

۱۵۵

**سج ۸۵:** در یک ذوزنقه متساوی الساقین، طول قاعده ها ۱۵ و ۹ واحد و اندازه ی ساق ها ۵ واحد است. فاصله نقطه تلاقی دو ساق این ذوزنقه از قاعده ی کوچک تر چند واحد است؟

۱۵۶

**سد ۸۷:** در ذوزنقه ای به طول قاعده های ۶ و ۹ و ارتفاع ۲ واحد، امتداد دو ساق در نقطه M متقاطع اند. فاصله M از قاعده بزرگ تر، چه قدر است؟

۱۵۷

**سد ۹۴:** در ذوزنقه ای اندازه قاعده ها ۹ و ۴ واحد و طول ساق ها ۶ و ۵ واحد است. محیط مثلثی که از امتداد ساق ها در بیرون ذوزنقه تشکیل شده کدام است؟

۱۵۸

**سج ۸۸:** در یک ذوزنقه ی متساوی الساقین، اندازه ی دو قاعده برابر ۵ و ۹ و طول ساق آن ۶ واحد است. مساحت این ذوزنقه کدام است؟

۱۵۹

**قضیه پروانه:**

۱۶۰

**سج ۸۷:** قاعده ی بزرگ تر ذوزنقه دو برابر قاعده ی کوچک تر آن است. مساحت کل ذوزنقه چند برابر مساحت مثلث سایه زده است؟ (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۹ (۴) ۱۰

۱۶۱

**سج ۸۷:** در شکل زیر، نسبت مساحت مثلث OBD به مساحت مثلث OCE کدام است؟

۱۶۲

**سج ۸۹:** در شکل مقابل نقاط M و N وسط دو ضلع است. مساحت بزرگترین مثلث چند برابر مساحت مثلث سایه زده است؟

۱۶۳

**سد ۹۵:** در ذوزنقه ای با طول قاعده های ۸ و ۱۲ و ارتفاع ۱۰ واحد، مساحت مثلث محدود به دو قطر و یک ساق آن، چند واحد مربع است؟ (۱) ۱۸ (۲) ۲۰ (۳) ۲۴ (۴) ۲۸

۱۶۴

**سد ۹۷:** در ذوزنقه ABCD، نسبت قاعده ها  $\frac{1}{3}$ ، خط واصل به اوساط ساق ها، اقطار ذوزنقه را در E و F قطع کرده است. مساحت چهار ضلعی ABEF، چند برابر مساحت ذوزنقه اولیه است؟

$$\frac{1}{4}(4) \quad \frac{3}{16}(3) \quad \frac{1}{6}(2) \quad \frac{2}{9}(1)$$

۱۶۵

**طول پاره خط موازی قاعده ها:**

$$x = \frac{aG + bg}{a + b}$$

۱۶۶

**مثل:**

**مثل:**

۱۶۷

**سج ۹۷:** در ذوزنقه ABCD، قاعده بزرگ  $\frac{1}{3}$  قاعده کوچک است و  $AF = \frac{1}{4} AD$  و EF موازی قاعده است. نسبت EF به CD کدام است؟

$$\frac{4}{5}(4) \quad \frac{8}{15}(3) \quad \frac{7}{15}(2) \quad \frac{11}{10}(1)$$

۱۶۸

**مثال:** در هر دوزنقه، نسبت دو شکل سایه زده به هم را به دست آورید؟

سرخ ۸۹: در شکل مقابل هر ضلع مثلث به ۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. دو چهارضلعی سایه زده نسبت به هم کدام وضع را دارند؟

(۱) هم مساحت (۲) هم محیط  
(۳) همپهشت (۴) متشابه

۱۷۱

**مثال:** در دوزنقه‌ی زیر با شرایط  $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{3}$  مستطیل EFGH را طوری محاط کردیم که  $\frac{AE}{ED} = \frac{2}{3}$  مساحت مستطیل چند درصد مساحت دوزنقه‌ی بزرگتر است؟

۱۶۹

**مثال:** طول، مساحت، تشابه و همپهشتی

- طول، مساحت، تشابه و همپهشتی
- طول، مساحت، انواع تشابه
- طول: قضیه تالس
- طول: ضرب تبدیل
- مساحت: قضیه مساحت
- زاویه: انواع زوایا
- طول، مساحت: اجزاء فرعی مثلث
- طول، مساحت: مثلث قائم الزاویه
- طول، مساحت: ۶، ۳: ضلعی منتظم

۱۷۲

**مثال:** دو نقطه A و B به فاصله ۱۰ واحد از یکدیگر هستند. چند نقطه در صفحه می توان یافت که فاصله اش از نقطه A برابر ۷ واحد و از نقطه B برابر ۵ واحد داشته باشد؟ (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۱۷۴

**مثال:** اگر فاصله دو خط موازی  $d$  و  $d'$  برابر ۴ باشد، مکان هندسی نقاطی از صفحه که فاصله شان از خط  $d'$  سه برابر فاصله شان از خط  $d$  باشد، کدام است؟

(۱) خط موازی  $d$  به فاصله ۲ واحد از  $d'$   
(۲) دو خط موازی  
(۳) خط موازی  $d'$  به فاصله ۲ واحد از  $d$   
(۴) دایره ای بین دو خط  $d$  و  $d'$

۱۷۶

**مثال:** نقاط A، B و C در یک راستا قرار دارند. اگر  $AC=7$  و  $AB=10$  باشد، چه تعداد از موارد زیر برای یافتن مکان نقطه C درست است؟ (الف) به مرکز A دایره ای به شعاع ۷ واحد رسم کنیم (ب) به مرکز B دایره ای به شعاع ۳ واحد رسم کنیم (ج) به مرکز B دایره ای به شعاع ۱۷ واحد رسم کنیم

۱۷۵

**مثال:** نقطه A به فاصله ۱۲ سانتی متری از خط  $d$  در یک صفحه قرار دارد. چند نقطه در این صفحه یافت می شود که از نقطه A و خط  $d$  به فاصله ۹ سانتی متر باشد؟

(۱) هیچ (۲) یک (۳) حداکثر دو (۴) دو

۱۸۰

**مثال:** دو خط غیر موازی  $d_1$  و  $d_2$  در یک صفحه مفروض اند. چند نقطه وجود دارد که از خط  $d_1$  به فاصله  $L_1$  و از خط  $d_2$  به فاصله  $L_2$  باشد؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۷۸

**مثال:** نقطه A بیرون خط  $d$  داده شده است اگر فقط سه نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد آنگاه فاصله A از  $d$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۸۲

**مثال:** خط  $d$  بر دایره ای به شعاع R مماس است. اگر دو نقطه روی این دایره از خط  $d$  به فاصله  $\frac{2R}{3} + ۲$  باشند آنگاه شعاع دایره کدام می تواند باشد؟

(۱) ۱ (۲)  $\sqrt{2}$  (۳)  $2\sqrt{2}$  (۴)  $3\sqrt{2}$

۱۸۳

**مثال:** نقطه A از خط  $d$  به فاصله ۲ و از خط  $d'$  به فاصله ۳ است. اگر فقط یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد آنگاه فاصله A از  $d$  کدام است؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) قابل محاسبه نیست.

۱۸۱

**مثال:** مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است چند نقطه روی مربع یافت می شود که فاصله اش از قطر AC برابر  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  باشد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) چهار

۱۸۵

**مثال:** نقطه A از خط  $d$  به فاصله ۲ و از خط  $d'$  به فاصله ۳ است. اگر فقط یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد آنگاه فاصله A از  $d$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) حداکثر دو

۱۸۶

**مثال:** خط  $d$  و پاره خط AB در یک صفحه با هم غیر موازی و غیر متقاطع می باشند. فاصله A تا  $d$  برابر ۸ واحد و فاصله B تا  $d$  برابر ۱۰ واحد می باشد. چند نقطه در صفحه یافت می شود که از A و B به یک فاصله و از خط  $d$  به فاصله ۹ باشند؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۸۸

**مثال:** نقطه A از خط  $d$  به فاصله ۲ و از خط  $d'$  به فاصله ۳ است. اگر فقط یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد آنگاه فاصله A از  $d$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۸۷

**مثال:** در مثلث ABC فاصله نقطه M (بای میانه AM) از ضلع های AB و AC به یک اندازه است. مثلث ABC همواره:

(۱) قائم الزاویه است  
(۲) متساوی الساقین است  
(۳) متساوی الاضلاع است  
(۴) قائم الزاویه متساوی الساقین است

۱۸۹

**مثال:** نقطه A از خط  $d$  به فاصله ۲ و از خط  $d'$  به فاصله ۳ است. اگر فقط یک نقطه وجود داشته باشد که از A به فاصله ۴ و از خط  $d$  به فاصله ۳ باشد آنگاه فاصله A از  $d$  کدام است؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) سه (۴) چهار

۱۸۴

**مثال:** مربع ABCD به ضلع ۴ مفروض است چند نقطه روی مربع یافت می شود که فاصله اش از قطر AC برابر  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  باشد؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۸۸

**مثال:** خط  $d$  و پاره خط AB در یک صفحه با هم غیر موازی و غیر متقاطع می باشند. فاصله A تا  $d$  برابر ۸ واحد و فاصله B تا  $d$  برابر ۱۰ واحد می باشد. چند نقطه در صفحه یافت می شود که از A و B به یک فاصله و از خط  $d$  به فاصله ۹ باشند؟

(۱) یک (۲) دو (۳) سه (۴) چهار

۱۸۷

**مثال:** خط  $d$  و پاره خط AB در یک صفحه با هم غیر موازی و غیر متقاطع می باشند. فاصله A تا  $d$  برابر ۸ واحد و فاصله B تا  $d$  برابر ۱۰ واحد می باشد. چند نقطه در صفحه یافت می شود که از A و B به یک فاصله و از خط  $d$  به فاصله ۹ باشند؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۸۷

**مثال:** خط  $d$  و پاره خط AB در یک صفحه با هم غیر موازی و غیر متقاطع می باشند. فاصله A تا  $d$  برابر ۸ واحد و فاصله B تا  $d$  برابر ۱۰ واحد می باشد. چند نقطه در صفحه یافت می شود که از A و B به یک فاصله و از خط  $d$  به فاصله ۹ باشند؟

(۱) صفر (۲) یک (۳) دو (۴) بی شمار

۱۸۷



**مثال:** مثلث ABC در رأس A قائمه است نقطه ای روی محیط مثلث وجود دارد که فاصله آن از رأس قائمه و ضلع BC برابر است. این نقطه

- محل برخورد میانه های مثلث ABC است.
- روی عمود منصف وتر قرار دارد.
- محل برخورد نیمساز های مثلث ABC است.
- روی نیمساز یکی از زوایای حاده قرار دارد.

۱۹۲

**مثال:** در صفحه مثلث ABC چند نقطه می توان یافت که از دو ضلع AC و BC و یا ادامه آنها به یک فاصله بوده و همچنین از دو سر پاره خط AC نیز به یک فاصله باشد؟

(۱) صفر  
(۲) یک  
(۳) دو  
(۴) بی شمار

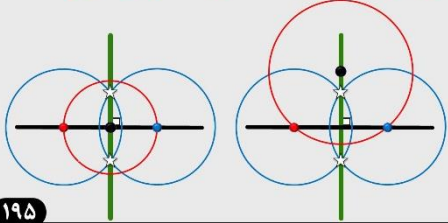
۱۹۱

**مثال:** سه خط  $d_1, d_2, d_3$  مفروض اند به طوری که  $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3$  و  $d_1$  و  $d_2$  در یک نقطه مشترک هستند. چند نقطه می توان یافت که از هر سه خط به یک فاصله باشند؟

(۱) صفر  
(۲) یک  
(۳) دو  
(۴) چهار

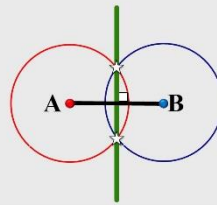
۱۹۰

**رسم عمود بر یک خط از نقطه رو و خارج خط**



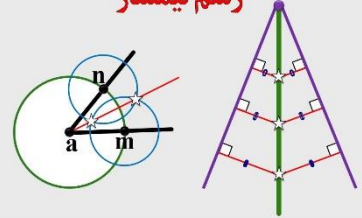
۱۹۵

**رسم عمود منصف**



۱۹۴

**رسم نیمساز**



۱۹۳

**نسبت و تناسب:**

$$\frac{1+2}{2-1} = \frac{2+4}{4-2} \Rightarrow \frac{3}{1} = \frac{6}{2}$$

$$\frac{1-2}{2+1} = \frac{2-4}{4+2} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-2}{6}$$

$$\frac{1+2}{2+4} = \frac{2+4}{2+4} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{6}{6}$$

$$\frac{1-2}{2+1} = \frac{2-4}{2+4} \Rightarrow \frac{-1}{3} = \frac{-2}{6}$$

۱۹۸

**نسبت و تناسب:**

$$\frac{ad}{bc} = \frac{bc}{ad} \Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}}$$

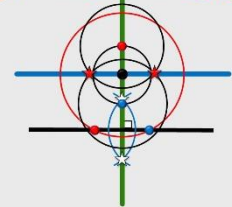
$$\frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}} \Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}}$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}} \Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}}$$

$$\frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}} \Rightarrow \frac{ad}{bc} = \frac{1}{\frac{bc}{ad}}$$

۱۹۷

**رسم خط موازی یک خط از نقطه خارج آن خط**



۱۹۶

**مثال:** برای اعداد ناصفر a, b, c داریم:  $\frac{a}{6} = \frac{b}{10} = \frac{c}{15}$  حاصل  $\frac{a+2b-c}{a-b}$  کدام است؟

۲۰۱

**مثال:**  $\frac{a}{b} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{a+b}{a-b} = ?$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{a+4b}{a-4b} = ?$$

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{3a-c+6}{3b-d+8} = ?$$

$$\frac{5-2x}{3} = \frac{2x}{y} \rightarrow x = ?$$

۲۰۰

**نسبت و تناسب:**

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c}$$

$$\frac{a+b}{b+a} = \frac{c+d}{d+c} \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c}$$

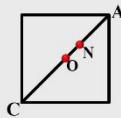
$$\frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c} \Rightarrow \frac{a+b}{b-a} = \frac{c+d}{d-c}$$

۱۹۹

**پایان**

۲۰۴

**مثال:** مطابق شکل در مربع به ضلع ۸ واحد که  $\frac{NC}{NA} = \frac{5}{3}$  فاصله N از مرکز مربع کدام است؟



۲۰۳

**مثال:** نقطه M روی پاره خط AB به طول ۱۵ و نقطه N در امتداد آن چنان قرار گرفته اند که  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{1}{4}$ ، طول پاره خط MN کدام است؟

۲۰۲

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

یادداشت

---

---

---

---

---

---

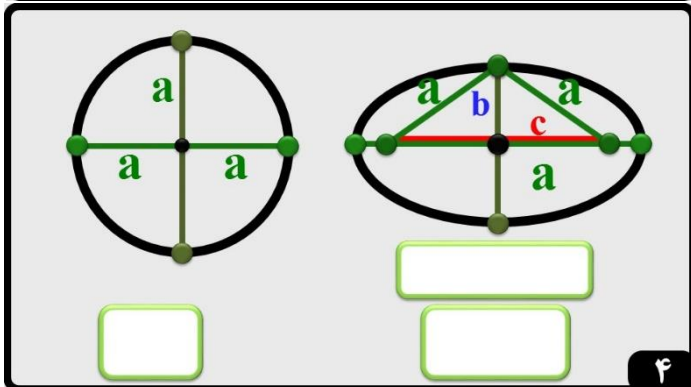
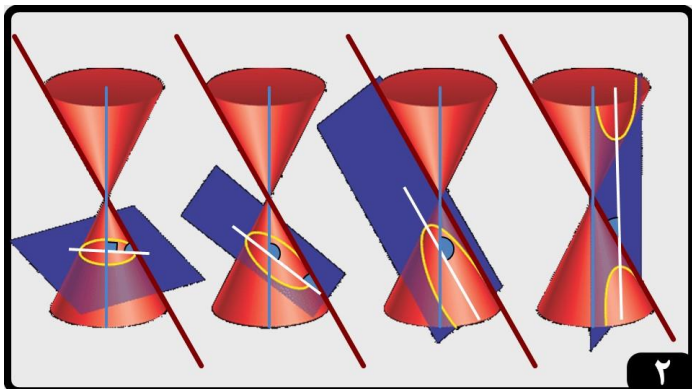
---

---

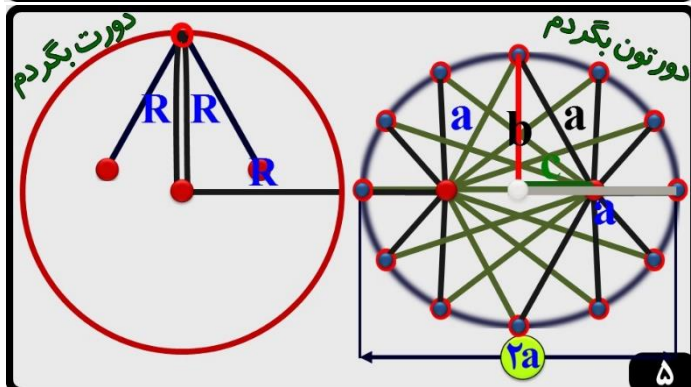
---

---

# ریاضی جامع (۳) گام ۴



● دایره و بیضی  
● معادله دایره و بیضی  
● خروج از مرکز دایره و بیضی  
● وتر کانونی دایره و بیضی  
● حاصل ضرب فاصله ها در دایره و بیضی  
● مساحت ها و محیط ها  
● مماس شدن بر محورها



● مقدمات دایره و بیضی  
● معادله دایره و بیضی  
● خروج از مرکز دایره و بیضی  
● وتر کانونی دایره و بیضی  
● حاصل ضرب فاصله ها در دایره و بیضی  
● مساحت ها و محیط ها  
● مماس شدن بر محورها



**منحنی های درجه دوم**

$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$$

$$-2x^2 - 2y^2 - 3x + 4y + 1 = 0$$

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$$

$$-3x^2 - y^2 - 4x + y + 7 = 0$$

**مثال:** مرکز و شعاع را بیابید.

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

$$4x^2 + 9y^2 - 8x + 36y + 15 = 0$$

**سوال:** نظرتون راجع به  $(Z > 0)$  و  $(Z = 0)$  و  $(Z < 0)$  چیه؟

**مثال:** مرکز و شعاع را بیابید.

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$$

**مثال:** مرکز و شعاع ماکزیمم و مینییم را بیابید.

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 4y - 3 = 0$$

$$-x^2 + 4y^2 + 2x + 8y + 4 = 0$$

۱۲

**مثال:** مرکز و شعاع ماکزیمم و مینییم را بیابید.

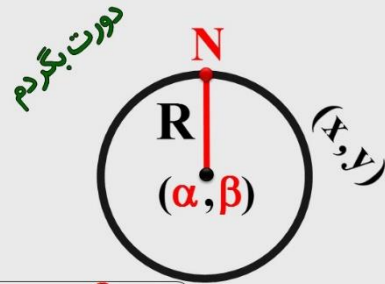
$$4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 9 = 0$$

$$3x^2 + y^2 - 12x + 2y + 4 = 0$$

۱۱

**مثال:** منحنی به معادله  $x^2 + y^2 - 3x - my + 5 = 0$  به ازای چند مقدار صحیح از  $m$  مربوط به یک دایره نمی باشد؟

۱۳



$$\left(\frac{x-\alpha}{R}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{R}\right)^2 = 1$$

۱۴



$$\left(\frac{x-\alpha}{1}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{1}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{x-\alpha}{1}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{1}\right)^2 = 1$$

۱۶

$$\left(\frac{x-\alpha}{1}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{1}\right)^2 = 1 \quad \left(\frac{x-\alpha}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-\beta}{2}\right)^2 = 1$$

۱۵

**مثال:** معادله مکان هندسی نقاطی که عرض نقاط دایره به معادله  $x^2 + y^2 = 16$  را به نسبت  $\frac{3}{4}$  تقسیم کند، کدام است؟

۱۷

**مثال:** مرکز و شعاع را بیابید.

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$$

۱۸

**مثال:** معادله استاندارد و گسترده دایره های زیر را بیابید.

$$W(1, 2) \quad R=3 \quad W(2, -1) \quad R=4$$

$$W(-1, 3) \quad R=2 \quad W(-3, -4) \quad R=3$$

۲۰

**مثال:** مرکز و شعاع را بیابید.

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

$$(x+1)^2 + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$$

۱۹

**مثال:** معادله استاندارد بیضی های زیر را بیابید.

$W(1,2) \quad a=2, b=1$

$W(-2,-1) \quad a=4, b=2$

**مثال:** در بیضی  $4x^2 + y^2 + mx + ny + f = 0$  قطر بزرگ ۶ می باشد. فاصله کانونی چه قدر است؟

۲۲

۲۱

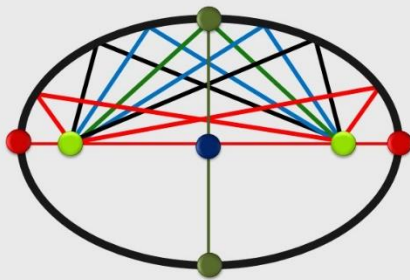
**سرد ۹۳:** در بیضی به معادله  $3x^2 + 4y^2 + 18x - 16y = 5$  مجموع فواصل هر نقطه بیضی از دو کانون آن؟

۲۳

**حرف آخر ۹۶:** در بیضی به معادله  $\frac{(2x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$  خطی از کانون بیضی (F) گذشته و بیضی را در نقاط A و B قطع کرده است. اگر F' کانون دیگر بیضی باشد، محیط مثلث ABF' کدام است؟

۲۴

**خاصیت بازتابندگی بیضی:**



۲۶

**حرف آخر ۹۶:** نقطه M روی بیضی  $9x^2 + 4y^2 = 1$  می باشد. اگر F و F' کانون های بیضی باشند، محیط مثلث MFF' کدام است؟

۲۵

**مثال:** اگر یک دسته شعاع نورانی از مبدا مختصات بر بیضی به معادله زیر بتابد، پرتو بازتاب الزاماً از چه نقطه ای می گذرد؟

$$\frac{y^2}{3} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

۲۷

**مثال:** اگر یک دسته شعاع نورانی از نقطه (1,1) بر بیضی به معادله زیر بتابد، پرتو بازتاب الزاماً از چه نقطه ای می گذرد؟

$$5x^2 + 4y^2 - 10x = 15$$

۲۸

**مثال:** اگر خط  $x = -\frac{1}{4}$  بر بیضی به معادله زیر مماس باشد، کدام خط زیر نیز بر بیضی مماس است؟

$$x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + k = 0 \quad x = \frac{15}{4} \quad (1)$$

$$x = \frac{13}{4} \quad (2)$$

$$x = \frac{17}{4} \quad (3)$$

$$x = \frac{18}{4} \quad (4)$$

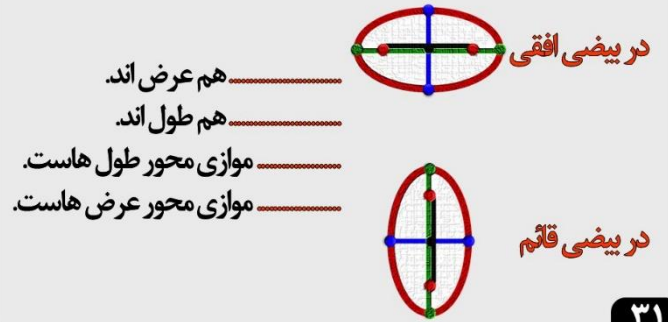
۳۰

**سرخ ۸۶:** دورترین نقاط بیضی به معادله  $2x^2 + y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$  تا مرکز آن، به کدام مختصات است؟

۲۹

**مثال:** نقاط  $F(3, 1)$  و  $F'(-3, 1)$  کانون های یک بیضی و نقطه ای واقع بر آن است. طول کوچک ترین قطر این بیضی کدام است؟

۳۲



هم عرض اند.

هم طول اند.

موازی محور طول هاست.

موازی محور عرض هاست.

۳۱

**مثال:** مختصات دو سر قطر مستطیل محیطی یک بیضی  $(3, 1)$  و  $(13, 7)$  می باشد. معادله دایره ای که مرکزش منطبق بر مرکز بیضی و اندازه قطرش با فاصله کانونی بیضی برابر باشد، کدام است؟

۳۳

**مثال:** در بیضی  $3x^2 + 4y^2 - 8y = 8$  حاصلضرب فاصله های یکی از کانون ها از دو سر بلندترین قطر بیضی چه قدر است؟

۳۴

**مثال:** به ازای چه مقادیر ثابت از  $a, b, c$ ، بیضی به معادله زیر در مبدأ مختصات بر محور  $x$  ها مماس است و از نقطه  $(-1, 2)$  می گذرد؟

۳۶

**سؤال ۸۷:** بیش ترین مساحت از بین مثلث هایی که یک رأس آن روی بیضی به معادله  $4x^2 + y^2 - 4x = 3$  و دو رأس دیگر آن کانون های این بیضی باشند، کدام است؟

۳۵

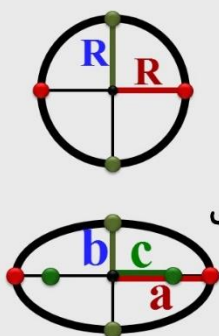
**مثال:**  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که خطوط  $x=2$  و  $y=-1$  محورهای تقارن بیضی  $4x^2 + y^2 - ax + by + 7 = 0$  باشد؟

۳۷

**سؤال ۸۵:** اگر  $x^2 + my^2 - 2x + m - 3 = 0$  معادله یک بیضی قائم باشد، مجموعه مقادیر  $m$  چیست؟

**سؤال ۸۵:** اگر  $x^2 + my^2 - 2x + m + \frac{1}{m} = 0$  معادله یک بیضی قائم باشد، مجموعه مقادیر  $m$  چیست؟

۳۸



- مقدمات دایره و بیضی
- معادله دایره و بیضی
- خروج از مرکز دایره و بیضی
- وتر کانونی دایره و بیضی
- حاصل ضرب فاصله ها در دایره و بیضی
- مساحت ها و محیط ها
- مماس شدن بر محورها

۴۰

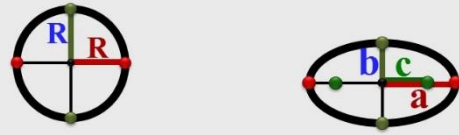
**مثال:** مساحت دایره به معادله زیر را بیابید؟  
 $(k-2)(x+1)^2 + (6-k)y^2 = 12$

۳۹

**مثال:** قطر بزرگ یک بیضی دو برابر قطر کوچک آن است. خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۴۲

• خروج از مرکز  $(e = \frac{c}{a})$



۴۱

**سرخ ۹۴:** بیضی به معادله  $x^2 + 4y^2 + ay + bx + c = 0$  در نقطه ای به طول ۳ بر محور x ها مماس است و از نقطه  $(-1, -2)$  می گذرد. خروج از مرکز آن، کدام است؟

۴۳

**مثال:** شکل ظاهری کدام بیضی به دایره شبیه تر است؟

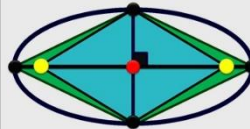
- ۱)  $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$
- ۲)  $2x^2 + 3y^2 - 24 = 0$
- ۳)  $4x^2 + 3y^2 - 28 = 0$
- ۴)  $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y = 0$

۴۴

**مثال:** نقاط  $(4, 3)$  و  $(-8, 3)$  مختصات کانون های یک بیضی با خروج از مرکز  $\frac{3}{5}$  اند، معادله بیضی را بیابید؟

۴۶

**مثال:** شکل مقابل، نمودار بیضی



$x^2 + my^2 + 4y + nx - 2 = 0$  میباشد که مساحت لوزی کوچکتر  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  مساحت لوزی بزرگتر است. مقدار  $m$  کدام است؟

۴۵

**سرخ ۹۶:** بیضی به کانون های  $(1, 1)$  و  $(1, -1)$  خروج از مرکز  $\frac{1}{2}$ ، خط  $y = 2x$  را با کدام طول ها قطع می کند؟

- $-\frac{1}{2}, 2$      $\frac{1}{2}, -1$      $-\frac{1}{4}, 1$      $-\frac{1}{2}, 1$

۴۷

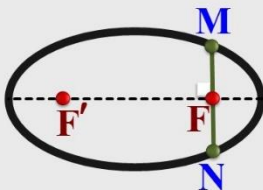
**مثال:** خروج از مرکز بیضی

که بر هر دو محور مختصات مماس بوده و مرکز آن منطبق بر مرکز دایره به معادله زیر باشد، کدام است؟

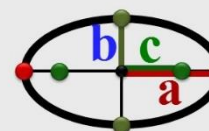
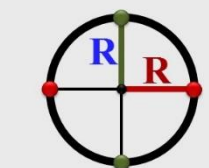
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$$

۴۸

• وتر کانونی



۵۰



- مقدمات دایره و بیضی
- معادله دایره و بیضی
- خروج از مرکز دایره و بیضی
- وتر کانونی دایره و بیضی
- حاصل ضرب فاصله ها در دایره و بیضی
- مساحت ها و محیط ها
- مماس شدن بر محورها

۴۹

**سرد ۹۰:** در بیضی به معادله  $3x^2 + 4y^2 = 12$  یک خط از کانون بر قطر بزرگ آن عمود میکنیم تا بیضی را در A و B قطع کند. اندازه وتر AB کدام است؟

۵۲

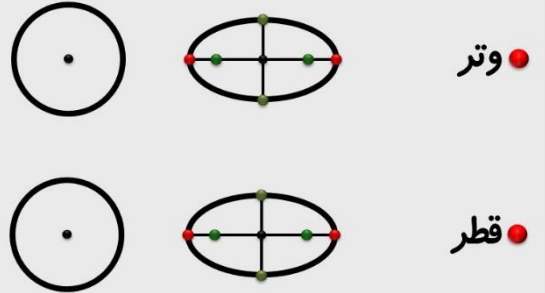
**مثال:** در یک بیضی، فاصله یک رأس غیر کانونی از کانون برابر ۸ می باشد. اگر خروج از مرکز  $\frac{1}{3}$  باشد، آن گاه طول وتر کانونی کدام است؟

۵۱

**سرد ۹۶:** در بیضی به معادله  $16y^2 + 5x^2 - 10x = 75$  خط گذرا بر کانون و عمود بر محور کانونی، بیضی را در M و N قطع می کند. اندازه MN کدام است؟

- ۲ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۳ (۳)
- ۳/۵ (۴)

۵۳



۵۴



- مقدمات دایره و بیضی
- معادله دایره و بیضی
- خروج از مرکز دایره و بیضی
- وتر کانونی دایره و بیضی
- حاصل ضرب فاصله ها در دایره و بیضی
- مساحت ها و محیط ها
- مماس شدن بر محورها

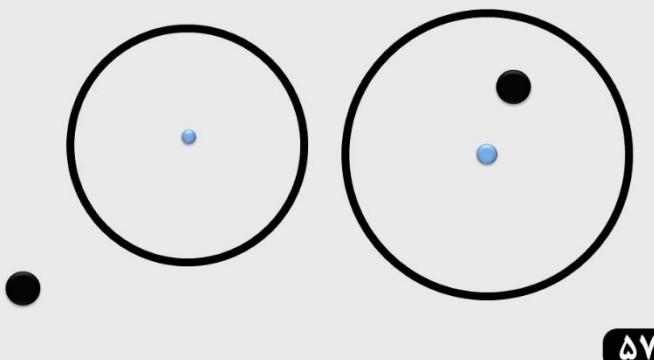
۵۶

**مثال:** در بیضی زیر چند قطر وجود دارد که طول آن ها عدد طبیعی است؟

۵۵

**سرخ ۸۵:** دایره ای از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(4, 0)$  گذشته و بر محور X مماس است. این دایره محور Y را در نقطه دیگری، با کدام عرض قطع می کند؟

۵۸



۵۷

**سرخ ۹۵:** مربع ABCD به ضلع ۴ واحد، مفروض است. شعاع دایره گذرا بر دو رأس A و B و مماس بر ضلع CD کدام است؟

- ۲/۲۵ (۱)
- ۲/۵ (۲)
- ۲√۲ (۳)
- ۳ (۴)

۶۰

**ح ۹۶:** دایره ای از ۳ نقطه  $(2, 0)$  و  $(0, 4)$  و  $(0, 8)$  می گذرد. طول نقطه دیگر بر خورد دایره با محور X کدام است؟

۵۹

حاصل ضرب فاصله‌ها (مجموع)



حاصل ضرب فاصله کانون‌ها از خط مماس بر بیضی

کانون از رئوس کانونی  
راس کانونی از دو کانون  
کانون از رئوس ناکانونی  
راس ناکانونی از دو کانون  
راس کانونی از رئوس ناکانونی  
راس ناکانونی از رئوس کانونی

(بیضی)  
حاصل ضرب فاصله

۶۱

مقدمات دایره و بیضی

معادله دایره و بیضی

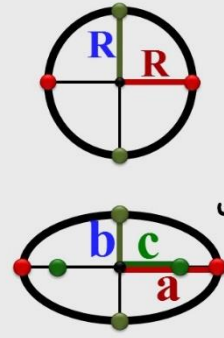
خروج از مرکز دایره و بیضی

وتر کانونی دایره و بیضی

حاصل ضرب فاصله‌ها در دایره و بیضی

مساحت‌ها و محیط‌ها

مماس شدن بر محورها



۶۴

مثال: تعداد نقاط برخورد دایره با محورهای مختصات؟ (مماس؟)

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 11 = 0$      $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 1 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x + 8y + 16 = 0$      $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$

$x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$      $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

$W(2, 3) \quad R=1$

$W(2, 3) \quad R=2$

$W(2, 3) \quad R=3$

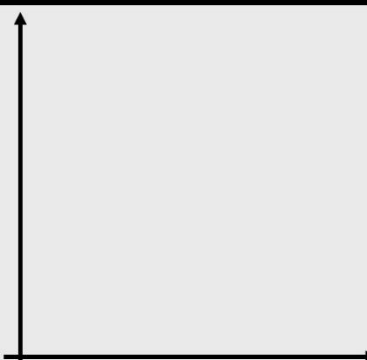
$W(2, 3) \quad R=4$

۶۵

مثال: اگر دایره  $x^2 + ax + y^2 - 4y = b$  در ربع دوم بر هر دو محور مماس باشد،  $a + 2b$  چقدر است؟

۶۸

۶۹



مقدمات دایره و بیضی

معادله دایره و بیضی

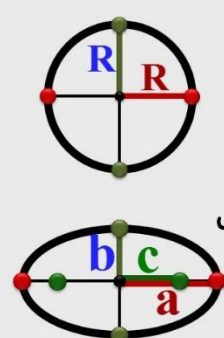
خروج از مرکز دایره و بیضی

وتر کانونی دایره و بیضی

حاصل ضرب فاصله‌ها در دایره و بیضی

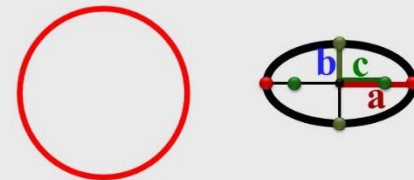
مساحت‌ها و محیط‌ها

مماس شدن بر محورها



۶۲

۶۳



مثال: دایره به معادلات زیر بر کدام محور مماس است؟

$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 9$

$x^2 + y^2 - 2kx + 4ky + k^2 = 0$

مثال: به ازای چه مقدار از  $m$  دایره به معادله زیر بر محور  $y$  ها مماس است؟

$(x+m)^2 + (y-6)^2 = 4$

۶۶

سرد ۹۰: دایره‌ای از نقطه  $(-1, 2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ تر کدام است؟

سرخ ۸۶: نقطه  $(3, 6)$  روی دایره‌هایی است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع دایره‌ها کدام است؟

۷۰



**سؤال ۹۰:** دایره ای از نقطه  $(2, -1)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس است. قطر دایره بزرگ تر کدام است؟

**سؤال ۸۶:** نقطه  $(6, 3)$  روی دایره هایی است که بر هر دو محور مختصات مماس است. شعاع این دایره ها کدام است؟

۷۲

**سؤال ۹۶:** دو دایره از نقطه  $(9, -2)$  گذشته و بر هر دو محور مختصات مماس اند.

الف) شعاع دایره ها؟

ب) معادله دایره ها؟

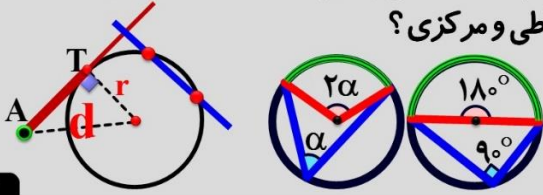
۷۳

**سؤال:** نقطه  $(m, n)$  روی دایره هایی قرار دارد که بر هر دو محور مختصات مماس اند. شعاع این دایره ها؟

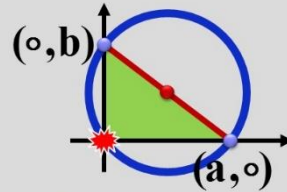
۷۱

# دایره تکمیلی

خط مماس خطی است که بر شعاع، در نقطهٔ تماس ..... است.  
 فاصلهٔ مرکز دایره تا خط مماس، برابر ..... می باشد.  
 طول پاره خط مماس .....  
 معادلهٔ بر خورده خط مماس با دایره ..... دارد.  
 زاویهٔ محاطی و مرکزی؟



**سده ۹۳:** شعاع دایره گذرا بر نقاط  $(1, -2), (2, 1), (0, 0)$  برابر کدام است؟ **مشابه سده ۹۱**

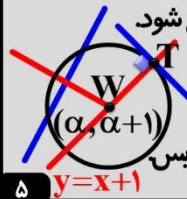


$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0$$

**سده ۹۶:** به ازای کدام مقدار  $a$  زاویه ی خط مماس بر دایره به معادلهٔ  $x^2 + y^2 - 2x + y = 1$  و خط به معادلهٔ  $3x + 2y = a$  در نقطهٔ تلاقی آنها  $90^\circ$  درجه است؟

خط قائم خطی است که در نقطهٔ تماس بر خط مماس ..... است.  
 هر خط عمود به خط مماس بر دایره (خط قائم بر دایره)، از ..... می گذرند و بالعکس.  
 عمود منصف هر وتر از دایره، بر آن دایره ..... می باشد.  
 از تقاطع خط قائم و دایره، پاره خطی به نام ..... جدا می شود.  
 از تقاطع خط قاطع و دایره، پاره خطی به نام ..... جدا می شود.  
 ..... تنها منحنی درجه دو که قائمهایش از یک نقطهٔ ثابت  $T$  می گذرد.  
 اگر معادلهٔ خط قائم بر دایره را داشتی، ..... بنویس.



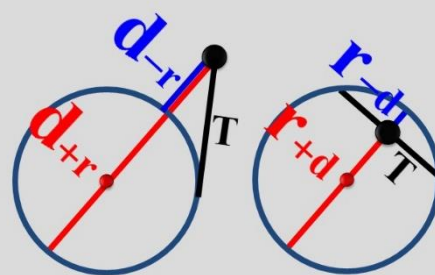
**مثال:** کدام خط بر دودایره به معادلات زیر قائم است؟

$x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$	(۱) $3x + 4y = 2$
	(۲) $3x + 4y = -2$
$x^2 - 2x + y^2 + 2y - 5 = 0$	(۳) $3x + 4y = 1$
	(۴) $3x + 4y = -1$

**سده ۹۵:** دایره ای، محورهای را در دو نقطه به طول های ۱ و ۳ قطع کرده و مرکز آن، بر روی نیمساز ربع اول است. شعاع این دایره کدام است؟

**الف)** نقطه  $(2, 1)$  نسبت به دایره به معادلهٔ زیر چه وضعیتی دارد؟ مرکز و شعاع؟  
 $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 3 = 0$

**ب)** طول کوتاه ترین و بلندترین و تری از دایره را بیابید که از این نقطه می گذرد؟



**شعاع:**  
 فاصله گنگستر:  
 کوتاه ترین فاصله:  
 بلندترین فاصله:  
 کوتاه ترین وتر:  
 بلندترین وتر:

**سرخ ۸۸:** دایره ای از دو نقطه  $(2, 0)$  و  $(-2, 0)$  گذشته و بر خط  $y=1$  مماس است. شعاع؟ معادله دایره؟

۱۱

**مثال:** طول وتری که دایره  $(x-3)^2 + y^2 = 9$  از خط  $x+y=1$  جدا می کند، را بیابید؟

۱۲

**مثال:** از نقطه  $A(5, 3)$  خط قائمی بر دایره به معادله زیر رسم شده، معادله خط کدام است؟  
 $(m+1)x^2 + 2y^2 - 4mx + 8y - 6 = 0$   
**مثال:** کمترین و بیشترین فاصله نقطه  $A(5, 3)$  از این دایره؟

۱۴

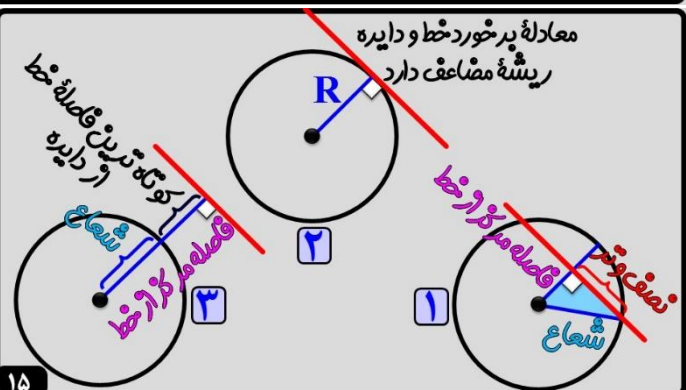
**سرخ ۹۰:** فاصله نزدیک ترین نقاط دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 4$  از خط  $3x + 4y = 15$  چیست؟

۱۳

**سرخ ۹۰:** بیشترین فاصله؟

**سرخ ۹۵:** دایره ای به مرکز  $(2, -1)$  و مماس بر خط به معادله  $x-y=1$  محور  $x$ ها را با کدام طول قطع می کند؟

۱۶



۱۵

**سرخ ۸۹:** دایره ای بر خط به معادله  $y=2x-1$  مماس است و تمام قائم های آن دایره از نقطه  $(-1, 2)$  می گذرند. بیشترین فاصله نقاط این دایره از محور  $x$ ها کدام است؟

۱۷

**سرخ ۹۴:** دایره ای بر محور  $x$ ها و خط به معادله  $3x+4y=0$  مماس است. اگر مرکز این دایره در ناحیه اول و شعاع آن ۳ واحد باشد، نقطه مشترک آن با محور  $x$ ها دارای کدام طول است؟

۱۸

**مثال:** دایره  $x^2 + y^2 - 4x + 2y + m = 0$  بر نیم سازه ربع اول و سوم مماس می باشد.  $m$  چه قدر است؟

۲۰

**سرخ ۹۱:** به ازای کدام مقادیر  $m$  خط به معادله  $y=mx+2$  بر دایره به معادله  $x^2 + y^2 - 2x = 3$  مماس است؟

۱۹

مرکز  $(\alpha, \beta)$  **یک نقطه**

یک نقطه **یک نقطه (خاص)**

$(4, 1)$   
 $(0, -1)$

۲۲

مرکز  $(\alpha, \beta)$  **یک نقطه**

یک نقطه

$(2, 1)$   
 $(-1, 0)$

۲۱

مرکز  $(\alpha, \beta)$  **یک نقطه**

یک نقطه **یک نقطه (خاص)**

$(0, 4)$   $(2, 4)$   
 $(-2, 2)$

۲۳

مرکز  $(\alpha, \beta)$  **یک نقطه**

یک نقطه **یک مولفه مرکز**

یک نقطه **یک نقطه (خاص)**

$(0, 2)$   
 $(1, 0)$   
 $(-4, 0)$

۲۴

$(0, 2)$   $(2, 0)$   
 $(0, 2)$   $(2, 2)$

یک نقطه **یک نقطه (خاص)**

معادله یک قطر **شعاع**

۲۶

مرکز  $(\alpha, \beta)$  **یک نقطه**

یک نقطه **یک مولفه مرکز**

یک نقطه **معادله یک قطر (خاص)**

$(0, 5)$   
 $(2, 1)$   $y=2$

۲۵

**سخ ۹۰:** دایره ای از دو نقطه  $(0, 1)$  و  $(3, 0)$  گذشته و معادله یک قطر آن به صورت  $X - Y = 2$  است. شعاع؟

۲۷

**دو خط مماس موازی**

**دو نقطه (معادله یک قطر)**

یک مولفه مرکز  $(\alpha, \beta)$

$(0, 2)$   
 $(0, 0)$   
 $y=x+4$   
 $y=x$

۲۸

**دو خط مماس موازی**

**دو نقطه (معادله یک قطر)**

یک مولفه مرکز  $(\alpha, \beta)$

$(1, 0)$   
 $y=x+4$   
 $y=x$

۳۰

**دو خط مماس موازی**

**دو نقطه (معادله یک قطر)**

یک مولفه مرکز  $(\alpha, \beta)$

$(1, 0)$   
 $y=x+4$   
 $y=2x+1$   
 $y=x$

۲۹

$2x - y = 0$   
 $2y - x = 0$   
 $y = -2x + 15$

دو خط مماس مورب  
 دو نقطه (معادله یک قطر)  
 یک مولفه مرکز

۳۲

$y = -x + \dots$   
 $y = x + \dots$   
 $\frac{1}{m}$   
 $y = \beta$   
 $x = \alpha$

۳۱

$2x - 2y = 0$   
 $(0, 3)$

دو خط مماس مورب  
 دو نقطه (معادله یک قطر)  
 یک مولفه مرکز

۳۳

سخ ۹۲: نقطه  $W(2\sqrt{5}, b)$  مرکز دایره ای است که بر دو خط به معادلات  $y = 2x$  و  $x = 2y$  مماس است. شعاع دایره کوچکتر؟

۳۴

# دایره از نگاهی دیگر

۳۶

سد ۸۹: معادله دایره ای که مرکز آن به طول ۱- و بر دو خط  $y = x$  و  $y = x + 4$  مماس باشد، کدام است؟

۳۵

## دایره آپولونیوس:

$|MA| = k \cdot |MB|$   
 $R = \frac{k}{|k^2 - 1|} |AB|$

اثبات در سایت: [www.harfeakhar.org](http://www.harfeakhar.org)

۳۷

تمرین کتاب درسی: اگر فاصله نقطه  $M(x, y)$  تا  $A(6, 0)$  دو برابر فاصله اش تا  $B(0, 3)$  باشد، مکان هندسی دایره ای با کدام شعاع است؟

۳۸

سد ۹۴: دو دایره  $C$  و  $C'$  در نقطه  $(0, 1)$  مماس برونی اند. اگر قائم های بر دایره  $C$  همواره از نقطه  $(2, -3)$  بگذرد، مرکز دایره با شعاع  $\sqrt{5}$  کدام است؟

(۱)  $(-1, 3)$  (۲)  $(-1, 2)$   
 (۳)  $(1, -2)$  (۴)  $(1, -1)$

۴۰

# وضعیت دو دایره نسبت به هم

۳۹

**سرخ ۹۳:** شعاع دایره ای به مرکز  $(-2, 2)$  و مماس خارج بر دایره  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$  کدام است؟

۴۲

**سرخ ۹۰:** به ازای کدام مقدار  $a$  دو دایره زیر مماس خارج اند؟  
 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + a = 0$      $x^2 + y^2 + 4x = 0$

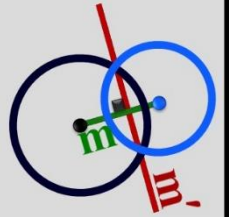
۴۱

**سرخ ۸۶:** به ازای کدام مقدار  $b$ ، دو دایره به معادلات  
 $x^2 + y^2 - 4y + b = 0$  و  $x^2 + y^2 + 2x - 2y = 0$   
 مماس داخل اند؟

- (۱) -۵
- (۲) -۴
- (۳) -۳
- (۴) -۲

۴۳

**وتر مشترک:**  
 $\begin{cases} x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$



۴۴

**سرخ ۸۴:** معادله وتر مشترک دو دایره به مراکز  $(-1, 2)$  و  $(2, 1)$   
 و به شعاع های مساوی ۲ واحد، کدام است؟

- (۱)  $y = 2x$
- (۲)  $y = 3x$
- (۳)  $3y = 2x$
- (۴)  $2y = 3x$

۴۶

**مثال:** معادله وتر مشترک و طول وتر مشترک دو دایره زیر؟

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

۴۵

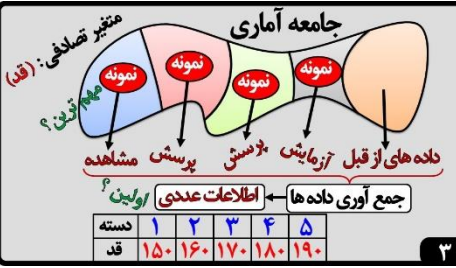
پایان

۴۷

# ریاضی جامع (۳) گام ۵

## آمار

### جامعه، نمونه جمع آوری داده ها



سؤال ۸: در کدام بررسی، اندازه نمونه برابر اندازه جامعه است؟

- ۱) نمونه تصادفی
- ۲) دسته بندی
- ۳) سرشماری
- ۴) متغیر کیفی

سؤال ۹: در کدام مورد عمل سرشماری انجام نشده است؟

- ۱) تمام افراد جامعه مورد مطالعه قرار گیرد.
- ۲) نمونه، برابر جامعه آماری
- ۳) اندازه نمونه برابر اندازه جامعه
- ۴) نمونه زیر مجموعه جامعه آماری

مثال: کدام یک از گزینه های زیر صحیح نیست؟

- ۱) اندازه گیری مهم ترین بخش آمار است.
- ۲) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه از مشکلات سرشماری است.
- ۳) یکی از روش های جمع آوری داده، مشاهده است.
- ۴) هدف از نمونه گیری، مطالعه و شناخت جامعه است.

سؤال ۹: کدام طریق برای جمع آوری داده ها مناسب نیست؟

- ۱) مصاحبه
- ۲) الگوی خاص
- ۳) مشاهده
- ۴) آزمایش

سؤال ۹: جمع آوری داده ها به کدام طریق مورد قبول نیست؟

- ۱) مصاحبه
- ۲) مشاهده
- ۳) انجام آزمایش
- ۴) پرسش هدایت کننده

مثال: بهترین روش جمع آوری داده ها؟

- ۱) میزان تحصیلات افراد جوانی کل در سال گذشته
- ۲) مهم ترین عامل پیشرفت تحصیلی دانش آموزان

مثال: کدام یک از گزینه های زیر نادرست است؟

- ۱) تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه می نامیم.
- ۲) اگر تمام افراد جامعه را مورد مطالعه قرار دهیم، سرشماری کرده ایم.
- ۳) در دسترس نبودن تمام اعضای جامعه از مشکلات سرشماری است.
- ۴) اولین اقدام در رسیدن به اطلاعات عددی، جمع آوری داده است.

### متغیرهای تصادفی

توجه:

- میزان یا مقدار ← کمی پیوسته
- تعداد ← کمی گسسته
- نوع ← کیفی اسمی
- مرحله ← کیفی ترتیبی

سؤال ۹: نوع آلاینده گی هوا چگونه متغیر است؟

- ۱) کیفی ترتیبی
- ۲) کیفی اسمی
- ۳) کمی پیوسته
- ۴) کمی گسسته

سؤال ۹: قطر تنه درختان یک باغ، کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کمی گسسته
- ۲) کمی پیوسته
- ۳) کیفی اسمی
- ۴) کیفی ترتیبی

سؤال ۹: مراحل تحصیلی، متغیر تصادفی است. نوع آن کدام است؟

- ۱) کمی گسسته
- ۲) کمی پیوسته
- ۳) کیفی اسمی
- ۴) کیفی ترتیبی

سؤال ۹: گروه خونی افراد کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کیفی ترتیبی
- ۲) کیفی اسمی
- ۳) کمی پیوسته
- ۴) کمی گسسته

سؤال ۸: تعدادی از دانش آموزان یک مدرسه، در هر روز یک ساعت جهت انجام کارهای فوق برنامه آمادگی دارند. نوع متغیر کدام است؟

- ۱) کیفی ترتیبی
- ۲) کیفی اسمی
- ۳) کمی پیوسته
- ۴) کمی گسسته

سؤال ۹: میزان آلودگی هوا، کدام نوع متغیر است؟

- ۱) کیفی ترتیبی
- ۲) کیفی اسمی
- ۳) کمی پیوسته
- ۴) کمی گسسته

### شاخص های مرکزی

مثال: نوع متغیر؟

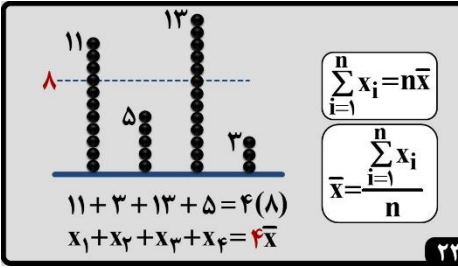
- الف: سن دانش آموزان شرکت کننده در یک دوره آموزشی
- ب: شدت جریان خروجی یک آداپتور
- پ: مرحله برداشت محصول
- ت: طول مکالمات تلفنی یک شرکت
- ث: جنسیت افراد یک شهر
- ج: میزان بارندگی در یک شهر

سؤال ۸: خطای اندازه گیری در کدام نوع متغیرها وجود دارد؟

- ۱) کیفی ترتیبی
- ۲) کیفی اسمی
- ۳) کمی پیوسته
- ۴) کمی گسسته

**سرخ ۹۵:** در داده های آماری زیر تفاضل میانه از مد جامعه کدام است؟  
 ۱۵, ۹, ۱۳, ۵, ۱۴, ۱۵, ۱۳, ۷, ۱۷, ۱۵, ۱۹, ۱۰

۱ (۱)  
 ۱/۵ (۲)  
 ۲ (۳)  
 ۲/۵ (۴)



$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$   
 $\sum_{i=1}^n a = a + a + a + \dots + a = na$   
 $\sum_{i=1}^n ax_i = a \sum_{i=1}^n x_i$

**مثال:** میانگین ده داده آماری ۱۸ می باشد اگر دو داده با میانگین ۱۴ را از بین آنان حذف کنیم، میانگین داده های باقیمانده کدام است؟

**مثال:** در مجموعه {۱۰, ۶۰, a, ۸۰, ۹۰} مقدار میانه، میانگین و مد با هم برابرند. a کدام است؟

**مثال:** میانگین داده های آماری دسته بندی شده مطابق جدول زیر کدام است؟

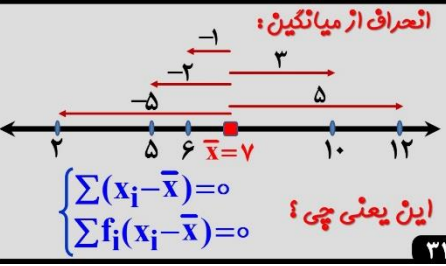
مرکز دسته	۱۷	۲۰	۲۳	۲۶	۲۹
درصد فرولتی نسبی	۲۰	x	۳۰	۲۵	۱۰

## شاخص های پراکندگی

**سرخ ۹۶:** در داده آماری مقدار میانگین ۱۱۲۴ محاسبه شده است. در بررسی مجدد داده ها متوجه شدیم که به جای داده ۱۰۲۴ عدد ۱۲۰۴ محاسبه شده است. با رفع اشتباه میانگین واقعی، کدام است؟

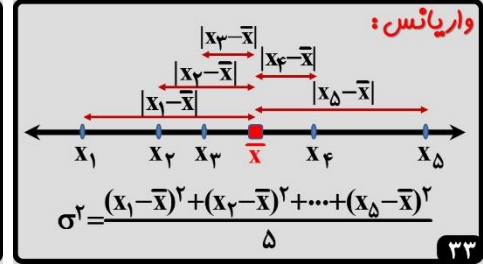
(۱) ۱۱۱۹ (۲) ۱۱۲۰  
 (۳) ۱۱۳۱ (۴) ۱۱۲۲

**مثال:** میانگین داده های  $x_1, x_2 + 1, x_3 + 2, \dots, x_{10} + 9$  برابر با میانگین داده های  $-2x_1, -2x_2 - 1, \dots, -2x_{10} - 9$  می باشد، میانگین داده های  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$  کدام است؟



**مثال:** انحراف از میانگین داده های آماری مطابق جدول زیر بیان شده است. مقدار k کدام است؟

$x_i - \bar{x}$	-۶	-۲	-۳	k	۵	۴
$f_i$	۶	۵	۹	۶	۳	۷



**سرخ ۹۷:** اگر میانگین داده های دسته بندی شده، برابر ۱۶ باشد با تعیین فراوانی دسته چهارم مقدار واریانس کدام است؟

نماینده دسته ها	-۴	-۲	۰	۲	۴
نماینده دسته ها	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فراوانی	۵	۷	۱۰	a	۳

**واریانس (۱):**  
 $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$

**واریانس (۲):**  
 $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}{n} - (\bar{x})^2$

**واریانس (۱):**  
 $\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}$

**انحراف معیار:**  
 $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

**سرخ ۸۸:** واریانس داده های  $a-3, a+1, a+5$  چند برابر واریانس داده های  $a-2, a-1, a, a+1, a+2$  می باشد؟

$-4, 0, 4 \rightarrow \sigma_1^2 = \frac{32}{3}$   
 $-2, -1, 0, 1, 2 \rightarrow \sigma_2^2 = \frac{10}{5}$   
 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{16}{3}$

$\sigma^2 = \frac{n^2 - 1}{12} \times d^2$   
 $\sigma_1^2 = \frac{13^2 - 1}{12} \times 16$   
 $\sigma_2^2 = \frac{5^2 - 1}{12} \times 1$   
 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{16}{3}$

**مثال:** مقادیر ۷ داده، اعداد متمایز و متوالی هستند. انحراف معیار داده ها چه قدر است؟

$\sigma_T^2 = \sigma_n^2 + \sigma_m^2$   
 $n\sigma_n^2 + m\sigma_m^2 = (n+m)\sigma_T^2$   
 $\frac{n\sigma_n^2 + m\sigma_m^2}{n+m} = \sigma_T^2$

**سرخ ۹۶:** یک جامعه با اندازه ۱۲ و واریانس ۱۲/۶، با جامعه دیگری به اندازه ۲۴ و واریانس ۷/۲، تشکیل جامعه جدیدی داده اند. اگر میانگین این دو جامعه یکسان باشد، انحراف معیار جامعه جدید کدام است؟

۳ (۲) ۲/۹ (۱)  
 ۳/۲ (۴) ۳/۱ (۳)

**سرخ ۹۶:** میانگین و انحراف معیار ۲۲ داده آماری به ترتیب ۲ و ۱۶ می باشد. اگر داده های ۲۰، ۱۱ و ۱۰ به آنان افزوده شوند، واریانس ۲۵ داده حاصل، کدام است؟

**سرخ ۹۶:** میانگین و واریانس ۲۹ داده آماری به ترتیب ۱۷ و ۵ می باشد. اگر داده های ناچور ۱۲، ۱۳، ۲۱ و ۲۲ از بین آنان حذف شوند، واریانس داده های باقیمانده کدام است؟



## ضریب تغییرات

۴۳

**ضریب تغییرات:**  
 $1, 2, 3, 4, 5$   
 $\bar{x} = 3 \quad \sigma = \sqrt{2} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$   
 $1001, 1002, 1003, 1004, 1005$   
 $\bar{x} = 1003 \quad \sigma = \sqrt{2} \rightarrow CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{2}}{1003}$

$x_i$	$\rightarrow$	$ax_i + b$
$\bar{x}$	$\rightarrow$	$a\bar{x} + b$
$\sigma^2$	$\rightarrow$	$a^2\sigma^2$
$\sigma$	$\rightarrow$	$ a \sigma$
$\frac{\sigma}{\bar{x}}$	$\rightarrow$	$\frac{a\sigma}{a\bar{x} + b}$

**سج ۹۵:** در ۳۰ داده آماری مجموع تمام داده ها برابر ۲۴۰ و مجموع مربعات این داده ها ۲۱۹۰ می باشد ضریب تغییرات کدام است؟  
 ۰/۳۷۵ (۴)    ۰/۳۲۵ (۳)    ۰/۲۷۵ (۲)    ۰/۲۲۵ (۱)

۴۸

**سج ۹۵:** میانگین شعاع دایره هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این دایره ها کدام است؟  
 $236\pi$  (۴)     $234\pi$  (۳)     $232\pi$  (۲)     $229\pi$  (۱)

۴۷

**سج ۹۵:** میانگین طول اضلاع مربع هایی ۱۵ واحد با ضریب تغییرات ۰/۲ محاسبه شده است. میانگین مساحت این مربع ها ، کدام است؟ (۱) ۲۲۹ (۲) ۲۳۲ (۳) ۲۳۴ (۴) ۲۳۶

۴۶

**مثال:** واریانس داده های  $x_1, x_2, x_3$  برابر صفر است، ضریب تغییرات داده های  $x_1 + 3, 3x_2 - 2, 4x_3 - 3$  کدام است؟

۴۹

**سج ۹۵:** داده های  $x_i = 1, 2, 3, 4, 5$  مفروض است. ضریب تغییرات داده های  $u_i = 12x_i + 6$  کدام است؟

۵۰

**سج ۹۵:** دستگاه A کلاهی با میانگین وزن ۱۵۰ و انحراف معیار ۳/۶ و دستگاه B همان کالا را با میانگین وزن ۱۶۰ و انحراف معیار ۳/۸۴ بسته بندی می کنند. دقت عمل کدام، پیرامون میانگین با اطمینان بیش تر است؟  
 (۱) یکسان  
 A (۲)  
 B (۳)  
 (۴) نمی توان اظهار نظر کرد.

۵۱

**سج ۹۶:** در ۲۵ داده آماری مجموع تمام داده ها ۲۷۵ و مجموع مربعات آن ها ۳۲۵۰ می باشد. ضریب تغییرات در این داده ها کدام است؟  
 ۰/۲۶۴۵ (۲)    ۰/۲۵۷۲ (۱)  
 ۰/۲۶۷۲ (۳)    ۰/۲۷۲۷ (۴)

۵۴

**سج ۹۴:** در ۵۰ داده آماری، مجموع اختلافات داده ها از عدد ۱۲ برابر صفر است و مجموع مجنورات اختلاف داده ها از عدد ۱۲ برابر ۴۵۰ می باشد. ضریب تغییرات این داده ها، کدام است؟

۵۳

**سج ۹۴:** ضریب تغییرات داده های آماری ۱/۳۵ می باشد. ۲ برابر این داده های آماری، عدد  $\frac{1}{4}$  میانگین آن ها افزوده شده است. ضریب تغییرات داده های جدید، کدام است؟

۵۲

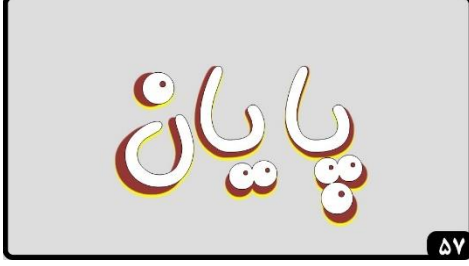
**سج ۹۶:** ضریب تغییرات، در داده های آماری زیر، کدام است؟

مرکز دسته	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰
فرآوانی	۷	۹	۱۷	۱۱	۶

۵۵

**سج ۹۴:** میانگین اضلاع مربع هایی برابر ۸ و میانگین مساحت آن ها ۶۵/۴۴ می باشد. ضریب تغییرات در طول اضلاع این مربع ها، کدام است؟

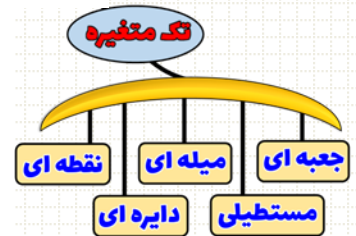
۵۶



۵۷

## نمودارهای تک متغیره و چند متغیره

آنچه خواهید دید ...



## نمودارهای تک متغیره

نمودار جعبه ای

	● ۲۳ داده داریم نمودار جعبه ای؟
	● ۲۲ داده داریم نمودار جعبه ای؟
	● ۲۱ داده داریم نمودار جعبه ای؟
	● ۲۰ داده داریم نمودار جعبه ای؟

## ○ انسانی ۹۹

در نمودار جعبه ای داده های ۱۶، ۱۷/۵، ۱۴، ۱۷، ۱۳، ۱۰، ۱۲/۵، ۹، ۱۵، ۱۳، تقاض داده های ابتدا و انتهای جعبه، کدام است؟

## ○ تألیفی

اگر داده های آماری ۱۳، ۸، ۲۰، ۳، ۲۱، ۱۱، ۱۰ را با نمودار جعبه ای نشان دهیم، حاصل  $\frac{R}{IQR}$  کدام است؟

$\frac{2}{3}(1)$        $\frac{2}{3}(2)$        $\frac{4}{3}(3)$        $\frac{3}{4}(4)$

## ○ تجربی ۸۸

اگر داده های آماری ۱۱، ۱۵، ۱۷، ۱۶، ۱۴، ۹، ۱۱، ۱۲، ۱۵، ۱۸، ۱۴ را با نمودار جعبه ای نشان دهیم، انحراف معیار داده های داخل جعبه کدام است؟

$1/1(1)$        $1/2(2)$        $1/25(3)$        $1/3(4)$

## محاسبه سریع

$(1/5)^2 =$        $(4/5)^2 =$        $(7/5)^2 =$   
 $(2/5)^2 =$        $(5/5)^2 =$        $(8/5)^2 =$   
 $(3/5)^2 =$        $(6/5)^2 =$        $(9/5)^2 =$

## ○ انسانی ۹۹

داده های آماری ۱۳، ۱۸، ۲۰، ۱۸/۵، ۱۴/۵، ۱۲، ۱۵، ۱۵/۵ و ۱۷ با نمودار جعبه ای، نشان داده شده است. انحراف معیار داده های داخل جعبه کدام است؟

$1/1(4)$        $1/2(3)$        $1/3(2)$        $1/5(1)$        $4(4)$        $3/5(3)$        $3/25(2)$        $3(1)$

## فصل: نمایش داده ها

### نمودارهای تک متغیره و چند متغیره

○ تألیفی

اگر داده های زیر را با نمودار جعبه ای نشان دهیم. واریانس داده های داخل جعبه کدام است؟

۰/۵, ۱, ۱/۵, ۲, ۳/۵, ۵/۵, ۷/۵, ۸, ۱۰

○ تألیفی

در یک نمودار جعبه ای، بزرگ ترین داده ۴۰ برابر کوچکترین داده است. اگر چارک اول و سوم به ترتیب ۲۵، ۴۴ و طول سبیل راست ۳ برابر طول سبیل چپ باشد، دامنه تغییرات داده ها کدام است؟

○ انسانی ۹۲

در نمودار جعبه ای ۳۱ داده آماری، میانگین داده های دنباله سمت چپ ۱۲ و سمت راست ۲۱ می باشد، اگر میانگین داده های داخل و روی جعبه ها ۱۵ باشد میانگین کل داده ها کدام است؟

۳(۱)      ۵(۲)      ۷(۳)      ۵/۵(۴)

○ انسانی ۰۰

دامنه میان چارکی نمودار جعبه ای شامل ۱۰ داده، ۲۵ و اختلاف چارک اول با سبیل ها ۳۸ و ۲۶ است. اگر کوچک ترین عضو داده ها ۳ باشد، مجموع مقادیر ممکن برای چارک سوم کدام است؟

۵۰(۱)      ۵۱(۲)      ۵۳(۳)      ۵۵(۴)

○ خ تجربی ۹۵

در نمودار جعبه ای ۲۳ داده آماری میانگین دنباله های سمت چپ و سمت راست به ترتیب ۲۱/۶ و ۳۳ و میانگین داده های داخل و روی جعبه ۲۵ می باشد. میانگین کل این داده ها کدام است؟

۱۵/۴۵(۱)      ۱۵/۵۴(۲)      ۱۵/۶۷(۳)      ۱۵/۷۶(۴)

○ تألیفی

دامنه میان چارکی نمودار جعبه ای شامل ۱۰ داده، ۲۵ و اختلاف چارک اول با سبیل ها ۲۴ و ۳۸ است. اگر کوچک ترین عضو داده ها ۳ باشد، چارک سوم کدام می تواند باشد؟

۱۲۰(۱)      ۱۰۰(۲)      ۶۴(۳)      ۳۶(۴)

○ خ تجربی ۹۵

۲۵/۸(۱)      ۲۶(۲)      ۲۶/۱(۳)      ۲۶/۲(۴)

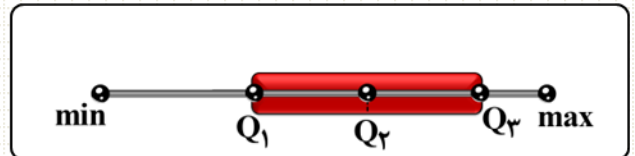
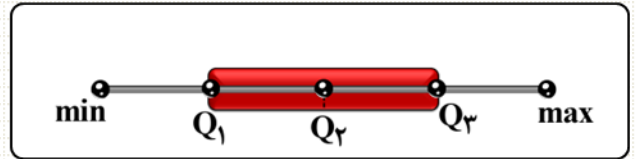
○ تألیفی

۶۶(۱)      ۵۲(۲)      ۵۴(۳)      ۶۴(۴)

# فصل: نمایش داده ها

## نمودارهای تک متغیره و چند متغیره

### پراکندگی در نمودار جعبه ای



### تألیفی

طبق نمودار جعبه ای داده های ۷، ۸، ۵، ۲، ۵، ۴، ۹، ۱۳/۵ چه تعداد از موارد زیر درست است؟

(۱) میانه داده ها برابر ۶/۵ است.

(۲) نمودار جعبه ای متقارن است.

(۳) پراکندگی داده ها در سمت چپ جعبه بیشتر است.

(۴) پراکندگی داده ها در سمت راست جعبه بیشتر است.

### نمودار مستطیلی و میله ای

حدود نمره	۰-۵	۵-۱۰	۱۰-۱۵	۱۵-۲۰
فراوانی				



### تألیفی

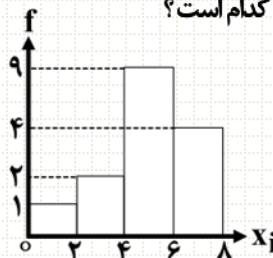
با توجه به نمودار مستطیلی زیر، واریانس داده ها کدام است؟

(۱) ۲/۵

(۲) ۲/۲۵

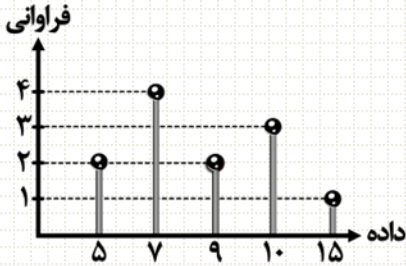
(۳) ۲/۴

(۴) ۲/۶



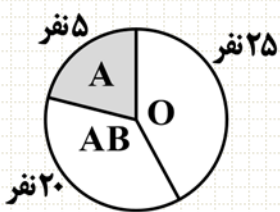
### تألیفی

مجموع چارک های اول و سوم برای داده های آماری در نمودار میله ای زیر کدام است؟



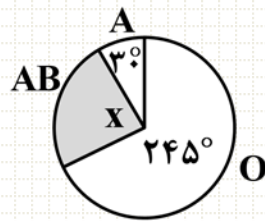
۱۶(۱)      ۱۷(۲)      ۱۸(۳)      ۱۹(۴)

### نمودار دایره ای



A درصد =

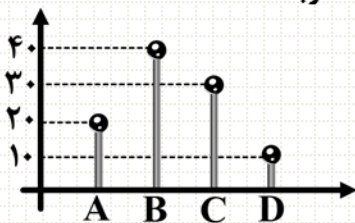
A زاویه =



AB درصد =

### انسانی ۹۹

نمودار میله ای زیر، درصد تعداد عضوهای متغیر کیفی اسمی است. در نمودار دایره ای آن، زاویه مربوط به گروه B چند درجه است؟



۱۳۲(۱)      ۱۴۴(۲)      ۱۵۰(۳)      ۱۵۶(۴)

## فصل: نمایش داده ها

### نمودارهای تک متغیره و چند متغیره

○ تالیفی

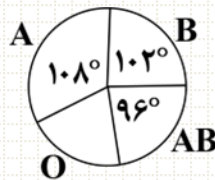
اگر تعداد اعضاء هر دسته را در یک جامعه آماری ۳ برابر کنیم، زاویه مربوط به یک دسته معین در نمودار دایره ای این جامعه چگونه خواهد شد؟

(۱) تغییری نمی کند. (۲) زیاد می شود.

(۳) کم می شود. (۴) اطلاعات کافی نیست.

○ انسانی ۸۵

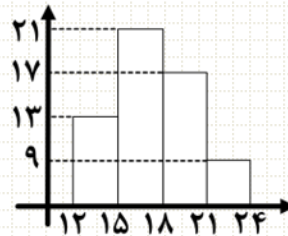
شکل مقابل نمودار دایره ای اهداء خون مراجعه کننده به یک ایستگاه انتقال خون است. چند درصد این افراد در گروه خونی O قرار دارند؟



(۱) ۱۵ (۲) ۱۶ (۳) ۱۸ (۴) ۲۰

○ تجربی ۹۴

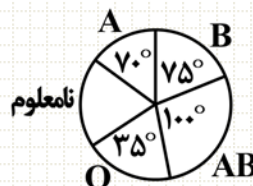
از داده های آماری با نمودار مستطیلی زیر، سه داده ۱۴ و ۱۶ و ۱۶ حذف شده است. در نمودار دایره ای داده های جدید، بزرگترین زاویه مرکزی نظیر دسته ها چند درجه است؟



(۱) ۹۰ (۲) ۱۰۵ (۳) ۱۲۰ (۴) ۱۳۵

○ تجربی ۹۵

نمودار دایره ای زیر متناسب با تعداد کارکنان سازمانی با گروه خونی متمایز است. گروه خونی ۳۲ نفر از آنان تعیین نشده است. چند نفر از آنان، دارای گروه خونی B هستند؟



(۱) ۲۵ (۲) ۳۰ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

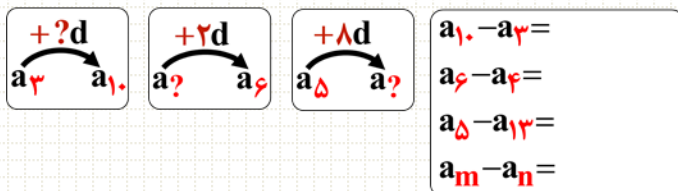
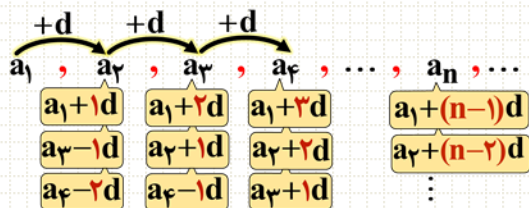
○ خ انسانی ۹۹

نمودار دایره ای زیر، نسبت نمرات مسئولیت پذیری ۸۰ نفر از کارکنان یک شرکت، در ۴ بازه مورد قبول را نشان می دهد. تعداد کارکنان در گروه A، کدام است؟

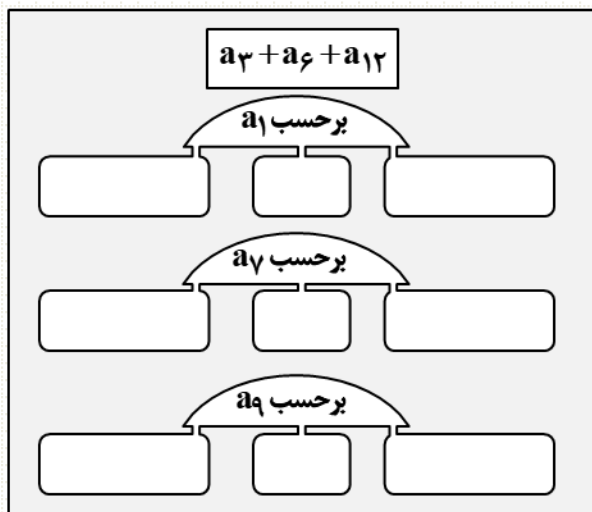
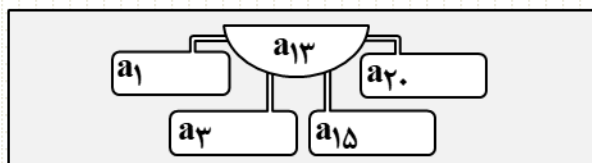


(۱) ۳۰ (۲) ۳۲ (۳) ۳۴ (۴) ۳۶

قدم برداشتن از مبدأ دلخواه به یک مقصد



همه برای یکی

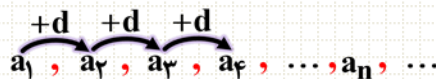


- ۱ دنباله حسابی، جمله عمومی، قدم برداشتن از مبدأ دلخواه به یک مقصد
- ۲ تبدیل مجموع یا تفاضل چند جمله به یک جمله (یکی برای همه)
- ۳ تعداد جملات یک دنباله متناهی (روش D·d) حرف آخر
- ۴ درج n واسطه حسابی بین دو عدد
- ۵ رابطه بازگشتی دنباله حسابی
- ۶ وقتی سه یا پنج جمله متوالی یک دنباله حسابی را می دهند ...
- ۷ ایجاد دنباله مشترک از دو دنباله حسابی
- ۸ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی (روش سروته، روش نصف و نیم)
- ۹ مقایسه ضابطه  $a_n$  با  $S_n$  حرف آخر

### معرفی دنباله حسابی

- ۲, ۶, ۱۰, ۱۴, □, ...
- ۱, ۳, ۶, ۱۰, □, ...
- ۱۷, ۱۵, ۱۳, ۱۱, □, ...
- ۳, ۹, ۲۷, ۸۱, □, ...
- ۳, ۳, ۳, ۳, □, ...

### جمله عمومی دنباله حسابی



$۲, ۵, ۸, \dots$ $a_n =$	$-۷, ۲, ۱۱, \dots$ $a_n =$	اختلاف مشترک (قدرنسبت)؟ $a_n = \frac{3n+1}{4}$
-----------------------------	-------------------------------	---

$۷, ۴, ۱, \dots$ $a_n =$	$-۵, -۱۱, -۱۷, \dots$ $a_n =$	جمله دهم این دنباله حسابی؟ $a_n = (k-2)n^2 + kn + 1$ $a_n = 2n + 1$
-----------------------------	----------------------------------	---

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

همه برای یکی

مثال

$$\bullet a_3 + a_5 + a_7 =$$

$$\bullet a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$$

$$\bullet a_4 + a_5 + a_6 + a_7 =$$

$$\bullet a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} =$$

$$a_2 + a_8 = 12$$

$$5a_4 + a_{10} + a_{15} =$$

$$a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11} = 18$$

$$a_4 + a_8 =$$

هر وقت دو جمله از یک دنباله حسابی رو دیدی

کم کن

یا

جمع کن

$$a_4 = 10$$

$$a_8 = 58$$

$$a_6 =$$

$$a_{11} =$$

$$a_9 = 8$$

$$a_{19} = 52$$

$$2a_{18} + a_6 =$$

$$5a_6 - 3a_2 =$$

$$4a_5 - 2a_1 + a_2 \rightarrow$$

$$5a_4 - a_8 - 2a_6 \rightarrow$$

$$2a_7 - 4a_5 + 2a_3 + 4a_1 \rightarrow$$

$$3a_5 - 6a_2 + 3a_3 \rightarrow$$

مثال

دنباله حسابی:

$$\bullet 4a_5 + 2a_3 - 6a_1 = 100 \rightarrow d = ?$$

$$\bullet a_5 + a_7 = 2(a_2 + a_9) \rightarrow a_2 = ?$$

$$\bullet a_1 + 3a_3 + 5a_5 = 18, d = 3 \rightarrow a_4 = ?$$

$$\bullet 3(a_2 + a_9) = a_2 + a_4 + a_7, d = -3 \rightarrow a_6 = ?$$

## درس ۱: دنباله حسابی

شاید باورتون نشه، 99% سوالاتی که میدن همیناس!

### ○ انسانی ۸۷

ده عدد، جملات متوالی از یک دنباله حسابی اند. مجموع ۵ جمله اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله آخر آن ها ۱۳۰ است. کوچکترین این اعداد کدام است؟

دو تا اطلاعات میدن

یکی از اینا رو میخوان

- $a_7$
- $6a_1 - 2a_1$
- $S_3$
- $12S_4 + S_5$
- $d$

- $a_2 = ?$
- $6a_9 - 4a_5 = ?$
- $S_{29} = ?$
- $S_9 - 5S_6 = ?$
- $d = ?$

۳(۱)      ۴(۲)      ۵(۳)      ۶(۴)

### ○ انسانی ۹۳

مجموع پنج جمله اول از یک دنباله حسابی صعودی برابر ۶۰ و مجموع دو جمله بزرگتر ۳۰ برابر مجموع دو جمله کوچکتر است. اختلاف مشترک کدام است؟

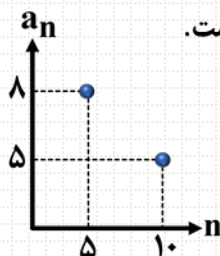
### ○ تألیفی

در یک دنباله حسابی با جمله سوم ۱- و جمله هفدهم ۲۳، مقدار جمله دهم کدام است؟

۱۰(۱)      ۱۱(۲)      ۱۲(۳)      ۱۳(۴)

### ○ تجربی ۱۴۰۱

بخشی از نمودار دنباله حسابی  $a_n$  در شکل زیر آمده است. جمله شانزدهم دنباله  $a_n$  کدام است؟ (کمی تغییر)



۴(۱)      ۵(۲)      ۶(۳)      ۷(۴)

### ○ تألیفی

در ۸ جمله اول دنباله حسابی، مجموع جملات با شماره های زوج ۲ برابر مجموع جملات با شماره های فرد است. اگر جمله ششم دنباله برابر ۱۲ باشد، تفاضل جمله دوم از جمله ششم کدام است؟

۱۱/۶(۱)      ۹/۶(۲)      ۲/۴(۳)      ۱/۴(۴)

### ○ خ انسانی ۹۷

در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول آن ۳۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۶۰ می باشد. جمله هشتم آن کدام است؟

۱۵(۱)      ۱۶(۲)      ۱۷(۳)      ۱۹(۴)

۲۶(۱)      ۲۹(۲)      ۳۰(۳)      ۳۱(۴)



# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی با بیست جمله، میانگین سه جمله اول ۴- و میانگین سه جمله آخر ۳۰ می باشد. حاصل  $a_7 - 2a_9 + 3a_{11}$  کدام است؟

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی، بین جملات رابطه  $8a_3 - 5a_2 + 2a_1 = 8$  برقرار است. اگر  $a_6 = 20$  باشد، جمله سیزدهم کدام است؟

۶(۱)

۱۰(۲)

۸(۳)

۱۲(۴)

۱۲(۱)

-۱۲(۲)

۸(۳)

-۸(۴)

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی، جمله سوم ۲۸ واحد کم تر از جمله دهم است. اگر جمله ششم برابر ۱۲ باشد، مقدار جمله یازدهم چقدر است؟

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = \frac{2n+5}{3}$ ، حاصل عبارت  $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_9 - a_6}$  کدام است؟

۳۲(۱)

۳۳(۲)

۳۴(۳)

۳۵(۴)

۳(۱)

۳/۵(۲)

۴(۳)

۴/۵(۴)

○ خ انسانی ۹۹

در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم، پنجم و سیزدهم برابر ۷۵ است. جمله هفتم، کدام است؟

○ تالیفی

جمله عمومی دنباله ای حسابی  $a_n = (k-2)n^2 + (k+1)n + 4$  است. حاصل  $a_4 + a_{13} + a_{17}$  کدام است؟

۲۲(۱)

۲۴(۲)

۲۵(۳)

۲۹(۴)

۹۰(۱)

۹۱(۲)

۹۲(۳)

۹۳(۴)

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی، مجموع جملات سوم و هشتم، یک سوم مجموع جملات چهارم و نهم است، جمله چندم دنباله برابر صفر است؟

○ تالیفی

در دنباله حسابی  $a_1 = 1$  و  $a_2 = \frac{5}{3}$ ، حاصل  $\frac{a_6 + a_{13} + a_{17}}{a_5 + a_9 + a_{11}}$  کدام است؟

(۱) هفتم

(۲) ششم

(۳) پنجم

(۴) چهارم

(۱)  $\frac{35}{71}$

(۲)  $\frac{105}{71}$

(۳)  $\frac{7}{17}$

(۴)  $\frac{25}{17}$

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

○ تألیفی

اعداد  $4+3p$ ،  $2p+3$  و  $5p-1$  به ترتیب از راست به چپ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. اگر  $2p+3$  جمله پنجم این دنباله باشد، جمله دوازدهم دنباله کدام است؟

۶۴ (۱)

۶۲ (۲)

۶۸ (۳)

۶۰ (۴)

و اما ..... به سؤال

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی، جمله هفتم ۸ و مجموع مربع جملات پنجم و نهم، ۱۴۶ است. اختلاف مشترک دنباله کدام است؟

$\pm 1$  (۱)

$\pm \frac{3}{4}$  (۲)

$\pm \frac{4}{3}$  (۳)

$\pm 2$  (۴)

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی، حاصلضرب جملات ششم و شانزدهم برابر ۱۰۰ و حاصلضرب جملات دهم و دوازدهم برابر ۲۲۰ می باشد. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

$\pm \sqrt{5}$  (۱)

$\pm 2\sqrt{5}$  (۲)

$\pm \frac{\sqrt{5}}{4}$  (۳)

$\pm \frac{\sqrt{5}}{4}$  (۴)

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی مجموع جملات دوم و چهارم، نصف جمله هشتم است و حاصل ضرب جملات سوم و چهارم برابر ۴۰ است. جمله اول این دنباله کدام می تواند باشد؟

۳۲ (۱)

۳۳ (۲)

۳۴ (۳)

۳۵ (۴)

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

○ تألیفی

اگر در یک دنباله حسابی  $a_5^2 - a_8^2 = 350$  و  $a_{10} = 7$  باشد، جمله بیستم کدام است؟

## درس ۱: دنباله حسابی

○ تالیفی

اعداد  $4+3p$ ،  $2p+3$  و  $5p-1$  به ترتیب از راست به چپ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی اند. اگر  $2p+3$  جمله پنجم این دنباله باشد، جمله دوازدهم دنباله کدام است؟

۶۴ (۱)

۶۲ (۲)

۶۸ (۳)

۶۰ (۴)

و اما ..... به سؤال

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی، جمله هفتم ۸ و مجموع مربع جملات پنجم و نهم، ۱۴۶ است. اختلاف مشترک دنباله کدام است؟

±۱ (۱)

± $\frac{3}{4}$  (۲)

± $\frac{4}{3}$  (۳)

±۲ (۴)

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی، حاصلضرب جملات ششم و شانزدهم برابر ۱۰۰ و حاصلضرب جملات دهم و دوازدهم برابر ۲۲۰ می باشد. قدر نسبت این دنباله کدام است؟

± $\sqrt{5}$  (۱)

± $2\sqrt{5}$  (۲)

± $\frac{\sqrt{5}}{4}$  (۳)

± $\frac{\sqrt{5}}{4}$  (۴)

○ تالیفی

در یک دنباله حسابی مجموع جملات دوم و چهارم، نصف جمله هشتم است و حاصل ضرب جملات سوم و چهارم برابر ۴۰ است. جمله اول این دنباله کدام می تواند باشد؟

$$\begin{cases} a_5 \times a_9 = 5 \\ (a_5)^2 + (a_9)^2 = 160 \end{cases}$$

آگه جملات توان دار و یا ضرب جملات  
رو به ما بدن، کی به دایمون برسه؟ ..

○ تالیفی

اگر در یک دنباله حسابی  $a_5^2 - a_8^2 = 350$  و  $a_1 = 7$  باشد، جمله بیستم کدام است؟

۳۲ (۱)

۳۳ (۲)

۳۴ (۳)

۳۵ (۴)

-۱ (۱)

-۲ (۲)

-۳ (۳)

-۴ (۴)

## فصل: الگوهای خطی

### درس ۱: دنباله حسابی

#### تعداد جملات یک دنباله متناهی (روش D, d)

$$\bullet 6, 7, 8, \dots, 39 \rightarrow n =$$

$$\bullet 6, 9, 12, \dots, 39 \rightarrow n =$$

$$\bullet 3, 11, 19, \dots, 1595 \rightarrow n =$$

$$\bullet 61, 54, 47, \dots, 12 \rightarrow n =$$

#### ○ مثال

یک کارگاه تولید پوشاک در روز اول فعالیتش ۱۶۰ واحد پوشاک تولید می کند. قرار است هر روز نسبت به روز قبل ۳۵ واحد پوشاک به تولید کارگاه اضافه شود. اگر تولید کارگاه به ۱۰۰۰ واحد پوشاک در روز برسد، این کارگاه تولیدات خود را می تواند به بازار وارد کند،

● در روز چندم از شروع کار این کارگاه به تولید ۱۰۰۰ واحد پوشاک در روز می رسد؟

● در روز چندم از شروع کار، این کارگاه می تواند تولیدات خود را وارد بازار کند؟

#### ○ انسانی ۸۶

قطار سریع السیری به طور آزمایشی، فاصله دو شهر را بار اول در ۴ ساعت طی کرده است. طبق برنامه تعیین شده، در هر رفت یا برگشت ۵ دقیقه از مدت زمان نوبت قبل کاسته می شود تا مدت زمان طی کردن این مسافت به ۲ ساعت برسد، تعداد نوبت آزمایشی کدام است؟

#### ○ تألیفی

جمله چندم دنباله حسابی  $2, 5, 8, \dots$  برابر با ۵۶ است؟

۲۵(۴)      ۲۴(۳)      ۲۰(۲)      ۱۶(۱)      ۲۱(۴)      ۲۰(۳)      ۱۹(۲)      ۱۸(۱)

#### ○ تألیفی

جمله پنجم یک دنباله حسابی، ۸ واحد از جمله هفتم آن بیشتر و جمله دهم آن ۲۸ است. جمله چندم این دنباله ۲۰- است؟

#### ○ تألیفی

یک چاه کن قرار است تعدادی چاه حفر کند، اگر عمق اولین چاهی که حفر می کند، ۳۰ متر و عمق هر چاه  $0/5$  متر از عمق چاه قبلی کمتر و عمق آخرین چاه  $3/5$  متر باشد، تعداد چاه ها کدام است؟

۲۳(۴)      ۲۲(۳)      ۲۱(۲)      ۲۰(۱)      ۵۶(۴)      ۵۵(۳)      ۵۴(۲)      ۵۳(۱)

## فصل: الگوهای خطی

### درس ۱: دنباله حسابی

○ تألیفی

بین اعداد ۸۳- و ۱۶ چند واسطه حسابی درج کنیم، تا قدرنسبت دنباله برابر ۳ باشد؟

۳۱(۱)      ۳۲(۲)      ۳۳(۳)      ۳۴(۴)

○ تألیفی

بین دو عدد ۱۰ و ۱۰۰ تعدادی واسطه حسابی درج کرده ایم به طوری که اختلاف بزرگ ترین و کوچک ترین عدد درج شده برابر ۶۰ می باشد. تعداد واسطه های درج شده کدام است؟

۷(۱)      ۵(۲)      ۶(۳)      ۸(۴)

○ تألیفی

بین ۱۲- و ۶۵ شش واسطه حسابی به ترتیب از کوچک به بزرگ درج می کنیم. مجموع واسطه های دوم تا پنجم کدام است؟

۱۰۲(۱)      ۱۰۶(۲)      ۱۱۰(۳)      ۱۱۴(۴)

	آخرین جمله مثبت؟ اولین جمله منفی؟ تعداد جملات مثبت؟
۱۰۱, ۹۷, ۹۳, ...	□, □, ...
	آخرین جمله مثبت؟ اولین جمله منفی؟ تعداد جملات مثبت؟
۱۰۱, ۹۵, ۸۹, ...	□, □, ...
	آخرین جمله منفی؟ اولین جمله مثبت؟ تعداد جملات منفی؟
-۷۶, -۷۳, -۷۰, ...	□, □, ...

○ تألیفی

دنباله حسابی با جمله اول ۶۳ و اختلاف مشترک ۴- چند جمله مثبت دارد؟

۱۵(۱)      ۱۶(۲)      ۱۷(۳)      ۱۸(۴)

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی جمله هفتم ۱۲ واحد کمتر از جمله پنجم است. اگر جمله دوم این دنباله ۳۱ باشد، بزرگترین جمله منفی این دنباله کدام است؟

-۲(۱)      -۳(۲)      -۴(۳)      -۵(۴)

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

○ تألیفی

بین اعداد ۵- و ۷۲ تعداد ده واسطه حسابی درج می کنیم. جمله هشتم از این واسطه ها کدام می تواند باشد؟

- ۱۶(۴      ۲۰(۳      ۲۵(۲      ۳۱(۱)

### رابطه بازگشتی و دنباله حسابی

$$a_1=1, a_2=3, a_{n+1}-a_n=a_{n+2}$$

۱, ۳, □, □, □, □, □, □, ...

$$a_1=1, a_{n+1}-a_n=4$$

۱, □, □, □, ...

○ تألیفی

اضلاع یک مثلث قائم الزاویه تشکیل دنباله حسابی می دهند. اگر محیط این مثلث ۲۴ باشد، مساحت آن کدام است؟

- ۲۶(۴      ۲۴(۳      ۲۲(۲      ۱۸(۱)

○ تألیفی

مجموع سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی برابر ۳۹ و حاصل ضرب آن ها برابر ۶۲۴ است. اگر دنباله صعودی باشد، مجموع ارقام جمله سوم دنباله کدام است؟

- ۷(۴      ۳۴(۳      ۶(۲      ۲۴(۱)

○ تألیفی

مجموع سه جمله متوالی یک دنباله حسابی، برابر ۲۱ و مجموع مربعات این سه جمله، برابر ۱۶۵ است. عدد کوچک تر کدام است؟

- ۱۴(۴      ۱۰(۳      ۷(۲      ۴(۱)

○ تألیفی

در یک دنباله،  $a_1=2$  و برای هر  $n \geq 1$ ،  $a_{n+1}-a_n=-3$ ، در این دنباله مقدار  $\frac{a_7}{a_3}$  کدام است؟

- ۸(۴      ۴(۳      ۳(۲      ۲(۱)

○ تألیفی

با توجه به دنباله مقابل:  $a_1=2$ ،  $a_{n+1}+4=a_n$  واسطه حسابی بین جملات سوم و هشتم، کدام است؟

- ۱۴(۴      ۱۰(۳      ۷(۲      ۴(۱)      -۳۲(۴      ۳۲(۳      -۱۶(۲      ۱۶(۱)

وقتی مجموع سه یا پنج جمله متوالی دنباله حسابی را می دهند ...

سه جمله متوالی (حسابی) →

پنج جمله متوالی (حسابی) →

● اضلاع مثلث قائم الزاویه ای که تشکیل دنباله حسابی می دهند:



## درس ۱: دنباله حسابی

○ انسانی ۸۹

مجموع پنج عدد که جملات متوالی از دنباله حسابی اند برابر ۱۰۵ و مجموع سه عدد بزرگتر ۶۰ برابر مجموع دو عدد کوچک تر است. بزرگترین این اعداد کدام است؟

○ خ ریاضی ۹۵

در دنباله های حسابی زیر، چند عدد سه رقمی مشترک کوچک تر از ۳۰۰ موجود است؟

● ۲, ۹, ۱۶, ۲۳, ...

● ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ...

۸(۴)      ۷(۳)      ۶(۲)      ۵(۱)      ۴۱(۴)      ۴۰(۳)      ۳۹(۲)      ۳۸(۱)

○ تالیفی

مجموع جملات مشترک دو دنباله حسابی زیر که کوچکتر از ۴۲۷ و بزرگتر از ۳۷۷ هستند، کدام است؟

$$\begin{cases} 1, 7, 13, \dots \\ 1, 9, 17, \dots \end{cases}$$

جملات مشترک دو دنباله حسابی و ایجاد دنباله حسابی دیگر

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} +3 \\ \curvearrowright \\ 2, 5, 8, 11, 14, 17, \dots \end{matrix} \\ & \begin{matrix} +2 \\ \curvearrowright \\ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, \dots \end{matrix} \end{aligned}$$

ک.م.م

$[3, 5] =$

$[6, 10] =$

جملات مشترک  $\rightarrow 5, 11, 17, \dots \rightarrow a_n =$

۶۸۴(۴)      ۶۹۶(۳)      ۷۸۴(۲)      ۷۹۴(۱)

مجموع n جمله اول دنباله حسابی (سر و ته)

$$\begin{cases} S_{1..n} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100 \\ S_{1..n} = 100 + 99 + \dots + 2 + 1 \end{cases}$$

$$S_{1..n} = 1 + 2 + \dots + 99 + 100$$

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

مجموع اعداد دورقمی زوج را به دست آورید.

○ تالیفی

اگر جمله عمومی جملات مشترک دو دنباله زیر، به صورت  $c_n = an + b$  باشد،  $a - b$  کدام است؟

$$\begin{cases} a_n = 3, 7, 11, \dots \\ b_n = 1, 4, 7, \dots \end{cases}$$

۱۷(۴)      ۱۲(۳)      ۱۰(۲)      ۷(۱)

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

○ مثال

$$\bullet 3 + 7 + 11 + \dots + 99 =$$

$$\bullet (-12) + (-3) + 6 + \dots + (186) =$$

○ تألیفی

بین دو عدد ۷ و ۲۹ تعداد  $n$  واسطه حسابی درج کرده ایم. اگر قدرنسبت ۲ باشد، مجموع جملات دنباله کدام است؟

- ۱۸۰ (۱)      ۱۹۰ (۲)      ۲۱۶ (۳)      ۳۰۰ (۴)

○ تألیفی

مجموع اعداد دنباله ۱۵۹۵، ...، ۱۹، ۱۱، ۳ کدام است؟

○ خ انسانی ۹۱

مجموع ۳۵ عدد طبیعی بخش پذیر بر ۳ که بزرگترین آنها ۱۵۰ باشد، کدام است؟

- ۱۵۹۸۰۰ (۱)      ۱۵۹۷۰۰ (۲)      ۱۵۸۹۰۰ (۳)      ۱۵۷۹۰۰ (۴)      ۳۴۲۰ (۱)      ۳۴۶۵ (۲)      ۳۴۷۵ (۳)      ۳۵۰۰ (۴)

○ انسانی ۹۷

مجموع اعداد طبیعی فرد و متوالی، شروع از ۳۳ و ختم به ۶۱ کدام است؟

○ تألیفی

مقدار  $x$  از تساوی  $x = 276 = x + 9 + \dots + 5 + 1$  کدام است؟

- ۷۸۰ (۱)      ۸۴۰ (۲)      ۸۵۰ (۳)      ۸۷۰ (۴)      ۳۷ (۱)      ۴۱ (۲)      ۴۳ (۳)      ۴۵ (۴)

○ تألیفی

مجموع همه اعداد طبیعی دورقمی مضرب ۴ کدام است؟

○ تألیفی

یک نردبان دارای تعدادی پله است. عرض نخستین پله ۱۲۵ سانتی متر و عرض آخرین پله ۴۵ سانتی متر و هر پله ۱۰ سانتی متر کوتاه تر از پله قبلی اش است. برای ساخت این پله ها چند متر چوب نیاز است؟

- ۱۱۸۰ (۱)      ۱۱۸۸ (۲)      ۱۱۹۰ (۳)      ۱۱۹۵ (۴)      ۷/۶۵ (۱)      ۷/۵۶ (۲)      ۸/۶۵ (۳)      ۸/۵۶ (۴)



## درس ۱: دنباله حسابی

○ انسانی ۹۲

شخصی در ماه اول A تومان پس انداز کرده و در هر ماه به اندازه بیشتر از ماه قبل پس انداز می کند تا مقدار پس انداز یک ماه آن به دو برابر پس انداز ماه اول برسد. اگر در این زمان، مجموع پس انداز وی ۶۳۰۰۰ تومان باشد، اولین پس انداز وی چقدر است؟

○ مثال

$$a_n = 2n + 3$$

$$a_1 + a_5 + a_9 + \dots + a_{77} = ?$$

۱۶۰۰(۱)      ۲۰۰۰(۲)      ۲۲۰۰(۳)      ۲۴۰۰(۴)

○ تألیفی

در دنباله حسابی زیر، مجموع جملات منفی بزرگتر از ۱۵۰- کدام است؟

۱۵۹۶(۱)      ۱۵۸۶(۲)      ۱۵۷۵(۳)      ۱۵۶۵(۴)

○ مثال

$$a_{25} = 4$$

$$a_1 + a_{12} + a_{14} + \dots + a_{70} = ?$$

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n = \frac{1}{4}n - 1$  مجموع جملات متوالی شروع از جمله دهم و ختم به جمله سی ام کدام است؟

۲۱۰(۴)      ۱۹۰(۳)      ۱۸۹(۲)      ۱۶۸(۱)

$$a_1 + a_{51} = 20$$

$$a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{59} = ?$$

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: دنباله حسابی

○ خ تجربی ۱۵

در ۲۰ جمله اول از یک دنباله حسابی، مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول کدام است؟

○ تجربی ۱۹

اگر جمله عمومی یک دنباله حسابی به صورت  $a_n = \frac{3}{4}n - 5$  باشد، مجموع ۱۵ جمله اول آن کدام است؟

(۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مجموع  $n$  جمله اول دنباله حسابی (نصف و نیم)

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$S_n =$

۹۰(۱) ۱۰۵(۲) ۱۲۰(۳) ۱۳۵(۴)

○ تألیفی

در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + 4$  و  $a_2 = -2$  مجموع ۲۱ جمله اول کدام است؟

۷۱۴(۱) ۷۱۲(۲) ۸۱۴(۳) ۸۱۲(۴)

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی با جمله اول ۳ و اختلاف مشترک ۴ مجموع ده جمله اول کدام است؟

۲۰۰(۱) ۲۱۰(۲) ۲۲۰(۳) ۲۳۰(۴)

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی مجموع جملات سوم و دهم برابر ۱۵ است. مجموع ۱۲ جمله اول این دنباله کدام است؟

○ مثال

●  $S_{11} + S_9 - S_5 =$

●  $S_{10} - 2S_4 =$

۶۰(۱) ۷۰(۲) ۸۰(۳) ۹۰(۴)

## درس ۱: دنباله حسابی

○ خ تجربی ۸۵

در یک دنباله حسابی شامل ۳۰ جمله، مجموع پنج جمله اول ۲۰ و مجموع پنج جمله آخر ۸۰ می باشد. مجموع جملات دنباله کدام است؟

○ تألیفی

مجموع ۵ جمله اول از یک دنباله حسابی نزولی برابر ۵۵ است و جمله سوم این دنباله ۲ واحد کمتر از مجموع دو جمله کوچک تر است. جمله اول این دنباله؟

○ خ تجربی ۸۸

در یک دنباله حسابی، جمله هفتم، نصف جمله سوم است. مجموع چند جمله اول از این دنباله برابر صفر است؟

○ ریاضی ۹۰

در یک دنباله حسابی، مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول آن است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد، جمله دهم کدام است؟

○ تألیفی

در دنباله حسابی  $\dots, 2x+10, 4x-2, 2x-2$  مجموع ۱۲ جمله اول کدام است؟

○ تألیفی

در یک دنباله حسابی داریم  $S_5 = 25$  و  $S_3 = 9$  در این صورت جمله اول چند برابر اختلاف مشترک است؟

○ خ انسانی ۹۳

در یک دنباله حسابی، جمله هشتم برابر ۵۴ و مجموع ۷ جمله اول مساوی ۱۸۲ است. جمله اول کدام است؟

○ تألیفی

اگر در یک دنباله حسابی  $S_8 - S_5 = 7$  باشد، حاصل  $a_4 + a_5 + \dots + a_{10}$  کدام است؟

۲۰۰(۱)

۳۰۰(۲)

۴۰۰(۳)

۶۰۰(۴)

۱۸(۱)

۱۹(۲)

۲۰(۳)

۲۱(۴)

۴۴۴(۱)

۴۲۴(۲)

۴۴۲(۳)

۲۲۲(۴)

۳(۱)

۴(۲)

۵(۳)

۶(۴)

۱۵(۱)

۱۶(۲)

۱۷(۳)

۱۹(۴)

۳۲(۱)

۳۶(۲)

۳۴(۳)

۳۸(۴)

$\frac{1}{4}$ (۱)

۲(۲)

۵(۳)

$\frac{1}{8}$ (۴)

$\frac{7}{3}$ (۱)

$\frac{14}{3}$ (۲)

$\frac{49}{3}$ (۳)

$\frac{17}{3}$ (۴)

# فصل: الگوهای خطی

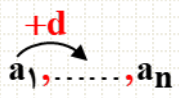
## درس ۱: دنباله حسابی

### تجربی ۸۳

اگر به اختلاف مشترک یک دنباله حسابی ۲ واحد اضافه شود، به مجموع ۱۰ جمله اول آن چقدر اضافه می شود؟

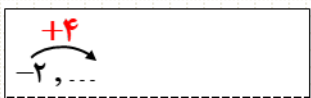
۱۰۰(۴)      ۹۰(۳)      ۲۰(۲)      ۱۸(۱)

### مقایسه ضابطه $a_n$ با $S_n$



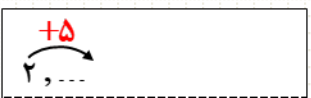
$a_n =$

$S_n =$



$a_n =$

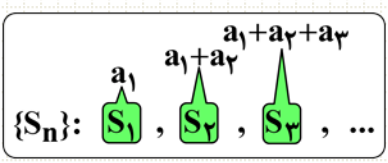
$S_n =$



$a_n =$

$S_n =$

### معرفی $S_n$



•  $\{S_n\}: 3, 8, 15, \dots$

•  $S_n = 1n^2 + 4n$

### تألیفی

اگر دنباله حسابی، ۲۹، ...، ۱/۵ دارای ۱۲ جمله باشد، تفاضل مجموع ۴ جمله اول از مجموع ۱۰ جمله اول کدام است؟

۱۰۶/۵(۴)      ۱۰۶(۳)      ۱۰۴/۵(۲)      ۱۰۴(۱)

### انسانی ۰۰

مجموع ۱۰ جمله اول یک دنباله حسابی ۲۶- و نسبت جمله پانزدهم به جمله ششم دنباله ۶ است. جمله یازدهم دنباله کدام است؟

-۱۶/۸(۴)      -۱۵/۶(۳)      -۱۴/۸(۲)      -۱۳/۶(۱)

### تألیفی

در یک دنباله حسابی افزایشی اگر  $a_4 + a_5 = 88$  و  $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 38$  باشد، آنگاه مجموع ده جمله اول این دنباله ؟

۲۲۵(۴)      ۱۷۵(۳)      ۱۵۰(۲)      ۱۲۵(۱)

## درس ۱: دنباله حسابی

### ○ تالیفی

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی برابر  $n(1+2n)$  است. حاصل

$$\frac{3a_2 + 2a_3}{a_1 - a_5}$$

کدام است؟

- ۲/۱۹(۴)      ۲/۱۵(۳)      ۲/۱۴(۲)      ۲/۱۲(۱)

### ○ خ تجربی ۸۹

مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی به صورت  $S_n = \frac{n(n-3)}{4}$  است. مجموع جملاتی که از جمله بیست و پنجم شروع و به جمله سی و پنجم ختم شوند، کدام است؟

- ۱۵۴(۴)      ۱۴۸(۳)      ۱۴۵(۲)      ۱۳۲(۱)

ضابطه $S_n$	ضابطه $a_n$	جملات $\{S_n\}$	جملات $\{a_n\}$
$S_n =$	$a_n =$	$S_n:$	$a_n: 3, 7, \dots$
$S_n =$	$a_n =$	$S_n: 2, 7, \dots$	$a_n:$
$S_n =$	$a_n = 2n + 3$	$S_n:$	$a_n:$
$S_n = 3n^2 + 4n$	$a_n =$	$S_n:$	$a_n:$

### ○ تالیفی

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی و سه جمله اول آن به صورت  $1, 2, 9, \dots$  باشد، مجموع چهار جمله سوم دنباله حسابی کدام است؟

- ۱۳۰(۱)      ۱۴۸(۲)      ۱۲۰(۳)      ۱۲۲(۴)

### ○ تالیفی

اگر  $S_n$  مجموع  $n$  جمله اول از یک دنباله حسابی و سه جمله اول آن به صورت  $1, 2, 9, \dots$  باشد، جمله پانزدهم این دنباله کدام است؟

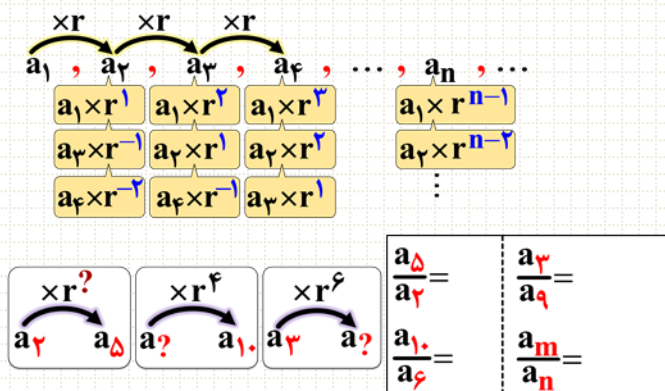
- ۴۰۵(۱)      ۴۱۰(۲)      ۴۱۵(۳)      ۴۲۰(۴)

### ○ تالیفی

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه  $S_n = 5n^2 - 3n$  به دست می آید. مجموع جملات پنجم و ششم این دنباله کدام است؟

- ۳۲(۱)      ۹۴(۲)      ۸۴(۳)      ۵۴(۴)

### قدم برداشتن از مبدأ دلخواه به یک مقصد



### ○ ریاضی ۹۵

تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است. اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد، قدرنسبت آن کدام است؟

- ۳(۴)      ۲(۳)       $\frac{1}{3}(2)$        $\frac{1}{3}(1)$

### ○ تالیفی

اگر در یک دنباله هندسی جمله یازدهم ۶ و جمله هشتم ۱۶۲ باشد. نسبت جمله سوم به جمله پنجم کدام است؟

- $\frac{1}{9}(4)$        $\frac{1}{3}(3)$       ۹(۲)      ۳(۱)

### ○ تالیفی

اگر در یک دنباله، جمله سوم برابر ۴ و  $a_{n+1} = 3a_n$  باشد، جمله چندم این دنباله برابر ۲۹۱۶ است؟

- ۹(۴)      ۸(۳)      ۷(۲)      ۶(۱)

- ۱ دنباله هندسی، جمله عمومی، قدم برداشتن از مبدأ دلخواه به یک مقصد
- ۲ ضرب یا تقسیم چند جمله از یک دنباله هندسی
- ۳ جمع یا تفریق چند جمله از یک دنباله هندسی
- ۴ تبدیل درصد افزایش (کاهش) به نسبت مشترک
- ۵ واسطه حسابی و هندسی
- ۶ وقتی سه یا پنج جمله متوالی یک دنباله هندسی را می دهند ...
- ۷ وقتی سه جمله از یک دنباله حسابی، تشکیل دنباله هندسی می دهند.
- ۸ مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی
- ۹ تعداد جملات یک دنباله هندسی متناهی

### معرفی دنباله هندسی

- ۱, ۴, ۹, ۱۶, □, ...
- ۲, ۶, ۱۸, ۵۴, □, ...
- ۵, ۱۱, ۱۷, ۲۳, □, ...
- ۹, ۳, ۱,  $\frac{1}{3}$ , □, ...
- ۳, ۳, ۳, ۳, □, ...
- $\frac{1}{4}$ ,  $-\frac{1}{4}$ , ۱, -۲, □, ...

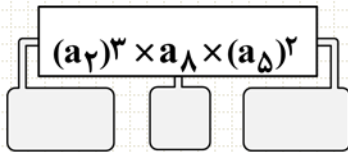
### جمله عمومی دنباله هندسی

- 
- ۲, ۶, ۱۸, ...  $a_n = ?$
  - ۹, ۳, ۱, ...  $a_n = ?$
  - ۲, ۲, ۲, ...  $a_n = ?$
  - -۴, ۸, -۱۶, ...  $a_n = ?$

# فصل: الگوهای غیرخطی

## درس ۲: دنباله هندسی

مثال ○



$a_8 \times a_1 \times a_{12} =$
$\frac{a_6 \times a_8 \times a_9}{a_5} =$
$\frac{a_3 \times a_5 \times a_6 \times a_1}{a_1 \times a_4 \times a_7 \times a_9} =$

مثال ○

دنباله هندسی:

$$\bullet \frac{(a_4)^3 \times (a_6)^2}{(a_3)^2} = \frac{8}{27} \rightarrow a_6 = ?$$

$$\bullet \frac{a_4 \times (a_5)^2}{(a_3)^3} = \frac{243}{32} \rightarrow r = ?$$

مثال ○

$$\bullet a_3 \times a_5 \times a_7 =$$

$$\bullet a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 \times a_7 =$$

$$\bullet a_6 \times a_7 \times a_8 \times a_9 =$$

$$\bullet a_2 \times a_4 \times a_6 \times a_8 \times a_{10} \times a_{12} =$$

تالیفی ○

بزرگترین جمله دنباله هندسی  $\frac{1}{4}, d, c, \frac{1}{3}, b, a$  کدام است؟

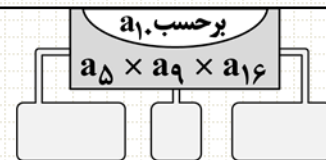
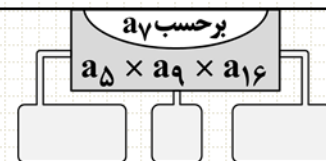
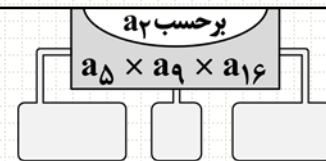
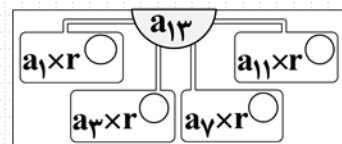
۱(۱)  $\frac{1}{3}(2)$   $\frac{4}{3}(3)$   $\frac{2}{3}(4)$

تالیفی ○

جمله صد و یکم دنباله حسابی  $\dots, -\frac{95}{4}, -24, \dots$  با جمله هشتم دنباله هندسی  $\dots, a_2, 128$  برابر است. قدرنسبت دنباله هندسی چقدر است؟

۲(۱)  $\frac{1}{4}(2)$   $\frac{1}{2}(3)$   $\frac{1}{4}(4)$

ضرب یا تقسیم چندجمله از یک دنباله هندسی



# فصل: الگوهای غیرخطی

## درس ۲: دنباله هندسی

### تألیفی

در ۶ جمله اول یک دنباله هندسی، حاصل ضرب جملات با شماره فرد ۲۷ برابر حاصل ضرب جملات با شماره زوج است. اگر جمله اول دنباله برابر ۵۴ باشد، جمله پنجم دنباله کدام است؟

$$a_1 \times a_4 \times a_7 = 27$$

$$a_3 \times a_6 = ?$$

$$a_6 \times a_7 = 8$$

$$a_2 \times a_5 \times a_8 \times a_{11} = ?$$

$\frac{4}{9}$  (۴)       $\frac{2}{9}$  (۳)       $\frac{3}{4}$  (۲)       $\frac{2}{3}$  (۱)

### تألیفی

حاصل ضرب سه جمله اول یک دنباله هندسی ۲۱۶ است. اگر جمله پنجم برابر ۴۸ باشد، جمله پنجم این دنباله ۷۶۸ است؟

### تألیفی

حاصل ضرب ۲۰ جمله اول دنباله هندسی با جمله عمومی  $a_n = 2^n$  کدام است؟

دهم (۴)      نهم (۳)      هشتم (۲)      هفتم (۱)

۲۲۱۰ (۴)      ۲۱۰۵ (۳)      ۲۱۰۰ (۲)      ۲۵۰ (۱)

### تألیفی

اگر در یک دنباله هندسی  $a_5 \times (a_3)^2 = \frac{1}{4}$  و  $a_8 \times (a_2)^2 = \frac{3}{4}$  جمله ششم چند برابر جمله سوم است؟

### تألیفی

اگر در یک دنباله هندسی حاصل ضرب نه جمله اول برابر ۸ باشد، حاصل ضرب  $a_2 \times a_4 \times a_6 \times a_8$  چقدر است؟

$\frac{27}{4}$  (۴)       $\frac{4}{27}$  (۳)       $\frac{8}{27}$  (۲)       $\frac{27}{8}$  (۱)

۴ (۴)       $2\sqrt{2}$  (۳)       $4\sqrt{2}$  (۲)       $2\sqrt{2}$  (۱)

### تألیفی

اگر در یک دنباله هندسی، قدرنسبت را دو برابر و جمله اول را نصف کنیم، حاصل ضرب ده جمله اول، چند برابر خواهد شد؟

### تألیفی

در یک دنباله هندسی با جملات مثبت، جملات سوم و نهم معکوس هم اند. اگر جمله چهارم دنباله برابر  $\frac{4}{9}$  باشد،  $\frac{a_2 \times a_5 \times a_{10} \times a_{12}}{a_8 \times a_6 \times a_4 \times a_3}$  کدام است؟

۲۳۵ (۴)      ۲۴۵ (۳)      ۲۱۵ (۲)      ۲۱۰ (۱)

$\frac{1}{27}$  (۴)       $\frac{27}{8}$  (۳)       $\frac{16}{81}$  (۲)       $\frac{81}{16}$  (۱)



# فصل: الگوهای غیرخطی

## درس ۲: دنباله هندسی

هر وقت دو جمله از یک دنباله هندسی رو دیدی

$$\begin{cases} a_6 = 9 \\ a_3 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$a_1 = ?$$

$$\frac{a_1 + a_2}{a_3 - a_1} = ?$$

$$\begin{cases} a_3 = 162 \\ a_5 = 18 \end{cases}$$

$$a_1 = ?$$

$$\frac{a_2 \times a_5 \times a_{13}}{a_1 \times a_{15}} = ?$$

تألیفی

در یک دنباله هندسی افزایشی، مجموع جمله پنجم و ششم ۳۰ و جمله چهارم ۵ است. حاصل  $\frac{a_1 \times a_7}{(a_2)^2}$  کدام است؟

- ۴(۱)      ۸(۲)      ۱۶(۳)      ۳۲(۴)

تألیفی

در یک دنباله هندسی نه صعودی و نه نزولی، جمله دوم برابر ۳ و جمله پنجم چهار برابر جمله سوم است. مجموع سه جمله سوم این دنباله کدام است؟

- ۲۸۸(۱)      ۲۸۰(۲)      ۲۷۰(۳)      ۲۶۰(۴)

جمع یا تفریق چند جمله از یک دنباله هندسی

$$\begin{array}{|c|} \hline a_5 + a_1 + a_{12} \\ \hline \text{بر حسب } a_2 \\ \hline \text{بر حسب } a_3 \\ \hline \text{بر حسب } a_5 \\ \hline \end{array}$$

$$a_6 - a_4 + a_{12}$$

$$\frac{a_3 + a_4 + a_6}{a_2 + a_5}$$

$$\frac{a_3 + a_5 - a_1}{a_2 + a_4 + a_6}$$

مثال

دنباله هندسی:

●  $\frac{a_7}{a_4} = 8 \rightarrow \frac{a_4 \times a_{12}}{a_2 \times a_8} = ?$

●  $a_7 a_5 a_1 = 9 a_2 a_3 a_4 \rightarrow r = ?$

●  $\frac{a_4 + a_2}{a_2 + a_1} = 7, a_5 = 20 \rightarrow a_4 = ?$

### تبدیل درصد افزایش (کاهش) به نسبت مشترک

$$100 \xrightarrow{40\% \text{ کاهش}} 60 \quad \times (0.6)$$

$$100 \xrightarrow{40\% \text{ افزایش}} 140 \quad \times (1.4)$$

#### مثال

قیمت یک پیراهن ۱ میلیون تومان است. به دلیل تورم هر سال بر قیمت آن ۲۰ درصد اضافه می شود.

● قیمت پیراهن در سال سوم؟

● قیمت پیراهن پس از سه سال؟

#### ○ خ انسانی ۹۵

به علت تورم، بر قیمت کالایی به طور یکنواخت هر سال ۱۰ درصد افزوده می شود. در سال پنجم، قیمت کالا چند برابر قیمت سال اول است؟

$$1/4751(4) \quad 1/4641(3) \quad 1/3761(2) \quad 1/3321(1)$$

#### ○ تألیفی

وزن یک شهاب سنگ ۱۵ هزار کیلوگرم است. پس از ورود به جو زمین در هر دقیقه ۲۰٪ از وزن آن به خاطر تماس با جو زمین از بین می رود. پس از گذشت دقیقه از ورود به جو زمین چقدر از وزن شهاب سنگ باقی می ماند؟ (مدت زمان ماندن شهاب سنگ در جو زمین بیش از ۳ دقیقه است)

$$7683(4) \quad 7682(3) \quad 7681(2) \quad 7680(1)$$

#### ○ تألیفی

در یک دنباله هندسی مجموع دو جمله دوم برابر ۳۶ و حاصل ضرب سه جمله اول برابر ۲۷ است. جمله پنجم کدام است؟

$$81(4) \quad 27(3) \quad 18(2) \quad 9(1)$$

#### ○ انسانی ۸۸

در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم  $\frac{9}{4}$  و مجموع جملات چهارم و پنجم ۳۶ می باشد. جمله سوم این دنباله کدام است؟

$$12(4) \quad 9(3) \quad 8(2) \quad 6(1)$$

#### ○ تألیفی

در یک دنباله هندسی افزایشی، مجموع دو جمله هفتم و نهم برابر ۲۴ و تفاضل جمله پنجم از نهم برابر ۱۶ است. جمله اول این دنباله کدام است؟

$$\frac{2}{3}(4) \quad 1(3) \quad \frac{2}{9}(2) \quad \sqrt{3}(1)$$

# فصل: الگوهای غیرخطی

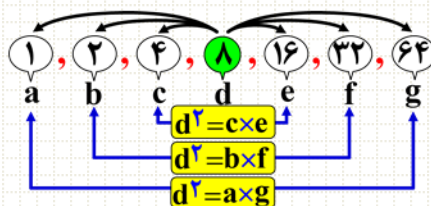
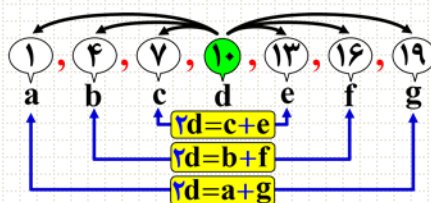
## درس ۲: دنباله هندسی

○ تألیفی

اگر داروی شیمی درمانی هر بار ۶۰٪ سلول‌های سرطانی را از بین ببرد و توده سرطانی در ابتدا ۱۰۱۲ سلول داشته باشد، پس از ۶ بار شیمی درمانی چه تعداد سلول سرطانی در بدن فرد باقی می‌ماند؟

- ۱)  $۲۱۲ \times ۱۰۰۶$     ۲)  $۲۱۰ \times ۱۰۰۶$     ۳)  $۲۱۲ \times ۱۰۰۴$     ۴)  $۲۱۰ \times ۱۰۰۴$

### واسطه حسابی و هندسی



- ۱)  $\frac{۳}{۵}$     ۲)  $\frac{۱}{۳}$     ۳)  $\frac{۱۱}{۳}$     ۴)  $\frac{۵}{۳}$

○ تألیفی

در دنباله  $\dots, \sqrt{2}+1, 1, \sqrt{2}-1$ ، جمله ششم کدام است؟

- ۱)  $۱۷+۱۲\sqrt{۲}$     ۲)  $۱۷+۶\sqrt{۲}$     ۳)  $۱۴+۱۲\sqrt{۲}$     ۴)  $۱۴+۶\sqrt{۲}$

○ تألیفی

اعداد  $b, 9, 3\sqrt{3}, 3^2$  جملات متوالی یک دنباله هندسی اند. واسطه هندسی بین دو عدد  $b$  و  $a\sqrt{3}$  کدام است؟

- ۱)  $3\sqrt{3}$     ۲)  $3$     ۳)  $\sqrt{3}$     ۴)  $9$

○ تألیفی

اعداد  $x+4, x-2, x-4$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی افزایشی اند. نسبت مشترک کدام است؟

- ۱)  $3$     ۲)  $9$     ۳)  $8$     ۴)  $7$

## درس ۲: دنباله هندسی

### ○ ریاضی ۸۷

اعداد  $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$  سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی اند. واسطه حسابی بین  $a$  و  $b$  کدام است؟

۲/۵ (۱)

۲ (۲)

۱/۵ (۳)

۵ (۴)

### ○ خ انسانی ۰۰

اگر  $Z, X+2, X, X-1, Y$ ، جملات متوالی یک دنباله هندسی باشند، مقدار  $XYZ$  کدام است؟

۲ (۱)

۴ (۲)

۸ (۳)

۱۶ (۴)

### ○ انسانی ۰۰

اگر  $4X, Z, Y, X - \frac{3}{4}$ ، جملات متوالی دنباله هندسی باشند، مقدار  $|X| + |Y| + |Z|$  کدام است؟

۱ (۱)

۳ (۲)

۵ (۳)

۷ (۴)

### ○ تالیفی

بین دو عدد ۴ و ۲۴ اعداد مثبت  $X$  و  $Y$  را طوری قرار می دهیم که سه جمله اول تشکیل دنباله هندسی و سه جمله آخر تشکیل دنباله حسابی دهند. تفاضل این دو عدد کدام است؟ (جمله اول ۴ است)

۲ (۱)

۴ (۲)

۶ (۳)

۸ (۴)

### ○ تالیفی

بین دو عدد ۲ و  $16\sqrt{2}$ ، شش واسطه هندسی درج کرده ایم. جمله چهارم واسطه ها کدام است؟

۴ (۱)

$4\sqrt{2}$  (۲)

۸ (۳)

$8\sqrt{2}$  (۴)

وقتی سه یا پنج جمله متوالی یک دنباله هندسی را می دهند ....

سه جمله متوالی (هندسی)  $\rightarrow \frac{a}{r}, a, ar$

پنج جمله متوالی (هندسی)  $\rightarrow \frac{a}{r^2}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$

### ○ تالیفی

در یک دنباله هندسی، اگر حاصلضرب پنج جمله متوالی برابر ۲۴۳ و نسبت مشترک برابر ۲ باشد، حاصل ضرب دو جمله کوچکتر را بیابید.

# فصل: الگوهای غیرخطی

## درس ۲: دنباله هندسی

○ تجربی ۹۰

در یک دنباله هندسی، مجموع سه جمله متوالی ۱۹ و حاصل ضرب آن‌ها ۲۱۶ می‌باشد. تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین این سه عدد، کدام است؟

○ دی انسانی ۰۱

اگر ریشه دوم جملات دوم، نهم و شانزدهم یک دنباله حسابی، سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی را تشکیل دهند، نسبت مشترک دنباله هندسی کدام است؟

○ مثال

اگر جملات سوم، هفتم و نهم دنباله حسابی، جملات متوالی دنباله هندسی شوند:

$$\text{حسابی: } a_3, \dots, a_7, \dots, a_9 \longrightarrow \text{هندسی: } \overset{t_1}{a_3}, \overset{t_2}{a_7}, \overset{t_3}{a_9}$$

● قدرنسبت دنباله هندسی؟

۷(۴

۶(۳

۵(۲

۴(۱

● جمله دهم دنباله هندسی چند برابر جمله هفتم؟

○ تالیفی

در یک دنباله هندسی غیریکنوا، حاصل ضرب سه جمله متوالی برابر ۸ و مجموع آن‌ها،  $\frac{7}{3}$  برابر قدرنسبت دنباله است. نسبت مشترک این دنباله کدام می‌تواند باشد؟

● چندمین جمله دنباله حسابی صفر است؟

● جمله دهم دنباله حسابی چند برابر جمله هفتم؟

-۲(۴

$-\frac{2}{3}(۳$

$-\frac{1}{3}(۲$

$\frac{1}{3}(۱$

### الگوریتم حرف آخری

وقتی سه جمله از یک دنباله حسابی، تشکیل دنباله هندسی می‌دهند.

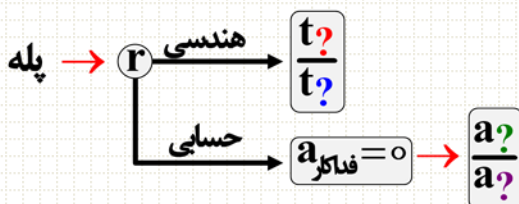
حسابی:  $a_k, \dots, a_m, \dots, a_b$

هندسی:  $\overset{t_1}{a_k}, \overset{t_2}{a_m}, \overset{t_3}{a_b}, \dots$

پله حرف آخری: حسابی:  $a_k, \dots, a_m, \dots, a_b$

هندسی:  $\overset{t_1}{a_k}, \overset{t_2}{a_m}, \overset{t_3}{a_b}$

$$r = \frac{b-m}{m-k} \quad \begin{matrix} b \\ m \\ k \end{matrix}$$



## درس ۲: دنباله هندسی

○ تألیفی

جمله اول یک دنباله حسابی یا جمله اول یک دنباله هندسی برابر است. اگر جمله های چهارم و ششم دنباله حسابی به ترتیب جمله های دوم و سوم دنباله هندسی باشند، جمله دوازدهم حسابی چند برابر جمله نهم است؟

- ۲(۱)      -۲(۲)      ۴(۳)      -۴(۴)

○ تألیفی

جملات دوم، پنجم و  $n$ ام یک دنباله حسابی غیر ثابت، سه جمله متوالی یک دنباله هندسی اند. به ازای کدام مقدار  $n$  جمله یازدهم دنباله حسابی برابر صفر است؟

- ۹(۱)      ۸(۲)      ۷(۳)      ۶(۴)

○ خ انسانی

جمله پنجم یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک ناصفر، واسطه هندسی بین جملات سوم و نهم آن دنباله است. اگر جمله پنجم دنباله برابر ۷ باشد، جمله صد و یکم دنباله، کدام است؟

- ۲۰۰(۱)      ۱۷۵(۲)      ۱۵۰(۳)      ۱۲۵(۴)

## مخرج زدایی

•  $\frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} - 2}$

•  $\frac{1 - \frac{3}{5}}{\frac{2}{5} + \frac{7}{2}}$

•  $\frac{1 - (\frac{2}{3})^6}{\frac{1}{3}}$

•  $\frac{1 - (\frac{1}{2})^5}{\frac{1}{2}}$

## مجموع $n$ جمله اول یک دنباله هندسی

•  $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$\uparrow$   $S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + \dots + a_1r^{n-1}$   
 $\ominus$   $rS_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + \dots + a_1r^n$

$rS_n - S_n = a_1r^n - a_1$

$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$

$S_n = a_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$       محدوده ۲       $S_n = a_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

$a_1 = 5$   
 $r = 2$

$S_7 =$

$a_1 = 16$   
 $r = 0.5$

$S_8 =$

$a_1 = 6$   
 $r = -2$

$S_6 =$

## فصل: الگوهای غیرخطی

### درس ۲: دنباله هندسی

○ انسانی ۹۹

مجموع ۸ جمله اول دنباله هندسی ... ۱۶، ۳۲، ۶۴ کدام است؟

۱۲۸/۵(۱)    ۱۲۸(۲)    ۱۲۷/۵(۳)    ۱۲۷(۴)

○ انسانی ۹۸

بین دو عدد ۴ و ۹۷۲، چهار عدد صحیح را طوری قرار می‌دهیم که جملات دنباله هندسی از ۴ شروع و به ۹۷۲ ختم شوند. مجموع این شش عدد، کدام کدام است؟

۱۴۵۶(۱)    ۱۴۶۸(۲)    ۱۵۴۶(۳)    ۱۶۵۴(۴)

○ خ انسانی ۹۹

جمله های پنجم و دوم یک دنباله هندسی، به ترتیب ۴ و  $\frac{1}{4}$  هستند. مجموع هشت جمله اول دنباله کدام است؟

○ انسانی ۹۴

در یک دنباله هندسی، جمله چهارم ۸ برابر جمله اول است. اگر جمله ششم ۲۴ باشد، مجموع شش جمله اول کدام است؟

۴۷/۲۵(۱)    ۴۷/۵(۲)    ۴۷/۷۵(۳)    ۴۸/۵(۴)

○ تالیفی

در یک دنباله هندسی نزولی بین جملات رابطه  $a_1 \times a_2 \times a_3 = 64$  برقرار است. مجموع شش جمله اول چند برابر جمله اول است؟

۶۳/۶۴(۱)    ۶۳/۳۳(۲)    ۶۳/۱۳۸(۳)    ۶۳/۱۶(۴)

○ تالیفی

مجموع ۶ جمله اول از دنباله با جمله عمومی  $(-\frac{1}{3})^n$  ۱۲ کدام است؟

یافتن جمله اول و نسبت مشترک از روی جمله عمومی دنباله هندسی		
$a_n = a_1 \times r^{n-1}$		
$a_n = 3 \times 2^{2n+1}$	$a_n = 6 \times (\frac{1}{4})^{-2n+1}$	$a_n = \frac{3^{2n-1}}{2}$

۶۳/۵(۱)    ۶۳/۷۵(۲)    ۶۴/۵(۳)    ۶۷/۷۵(۴)    ۲۴۲/۲۴۳(۲)    ۲۴۲/۸۱(۳)    ۷۲۸/۲۴۳(۴)

# فصل: الگوهای غیرخطی

## درس ۲: دنباله هندسی

○ تألیفی

مجموع  $n$  جمله اول یک دنباله هندسی به صورت  $S_n = \frac{2(3^n - 2)}{3}$  است. جمله هشتم چند برابر جمله پنجم است؟

۱۲(۱)

۲۱۶(۲)

۱۸(۳)

۳۶(۴)

○ تألیفی

کارفرمایی با یک تدوینگر توافق کرده که دستمزد روز اول ۶۴۰ هزار تومان و تا پایان هفته، دستمزد هر روز وی نسبت به روز قبل ۵۰ درصد افزایش داشته باشد. مجموع دستمزد ۶ روز اول تدوینگر چقدر است؟

۱۳,۳۰۰,۰۰۰(۱)

۱۳,۴۰۰,۰۰۰(۲)

۱۲,۳۰۰,۰۰۰(۳)

۱۲,۴۰۰,۰۰۰(۴)

○ تألیفی

در ۲۰ جمله اول یک دنباله هندسی با جمله اول  $\frac{3}{5}$ ، نسبت مجموع جملات ردیف زوج به مجموع جملات ردیف فرد برابر ۲ می باشد. مجموع هشت جمله اول دنباله کدام است؟

۱۵۰(۱)

۱۵۳(۲)

۱۵۷(۳)

۱۵۹(۴)

○ تجربی ۹۳

به ازای یک مقدار  $x$ ، اعداد  $x^2 - 2$ ،  $2x$ ،  $x^2 + 4$  به ترتیب سه جمله اول از دنباله هندسی نزولی اند. مجموع ۷ جمله اول این دنباله کدام است؟

۱۱۷(۱)

۱۲۵(۲)

۶۳(۳)

۱۲۷(۴)

○ تألیفی

مجموع چند جمله اول دنباله هندسی  $\dots, 20, 10, 5$  برابر ۱۳۷۵ است؟

۸(۱)

۹(۲)

۱۰(۳)

۱۱(۴)

○ تألیفی

اگر در یک دنباله  $a_1 = 160$  و  $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$  مجموع چند جمله اول دنباله برابر ۳۱۵ است؟

۵(۱)

۶(۲)

۷(۳)

۸(۴)



## فصل: الگوهای غیرخطی

### درس ۲: دنباله هندسی

#### ○ خ انسانی ۹۰

در یک دنباله هندسی، هر جمله  $\frac{2}{3}$  جمله قبلی آن است. اگر مجموع پنج جمله اول آن  $\frac{211}{27}$  باشد، جمله اول کدام است؟

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴(۴)

#### ○ خ انسانی ۹۱

در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک  $\frac{1}{2}$ ، اگر مجموع هشت جمله اول  $63\frac{3}{4}$  باشد، جمله پنجم کدام است؟

۱(۱)

۲(۲)

۳(۳)

۴(۴)

#### ○ تألیفی

در یک دنباله هندسی با نسبت مشترک ۲، مجموع هشت جمله اول چند برابر مجموع چهار جمله اول است؟

۱۴(۱)

۱۵(۲)

۱۶(۳)

۱۷(۴)

۳۶۹(۱)

۴۲۰(۲)

۴۴۱(۳)

۴۵۸(۴)

#### ○ ریاضی ۸۹

در یک دنباله هندسی، مجموع ۳ جمله اول ۱۳۶ و مجموع ۶ جمله اول ۱۵۳ می باشد. جمله اول چند برابر جمله پنجم است؟

۱(۱)  $\frac{81}{16}$

۸(۲)

۹(۳)

۱۶(۴)

سرشو داریم، ۲ شو داریم، تعداد نداریم !!! چکار کنیم؟

●  $3 + 6 + 12 + \dots + 384$

●  $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \dots + 128$

#### ○ خ انسانی ۹۸

در یک دنباله هندسی، با جمله اول ۲۲۴ و قدرنسبت  $\frac{1}{2}$ ، جمله  $n$ ام آن ۷ است. مجموع جملات این دنباله از ۲۲۴ تا عدد ۷ و خود این اعداد، کدام است؟

## درس ۲: دنباله هندسی

○ انسانی ۰۰

مقدار  $\frac{1}{3256} \times \dots \times \frac{1}{316} \times \frac{1}{38} \times \frac{1}{34}$  کدام است؟

$$\frac{255}{3512} (4)$$

$$\frac{63}{3256} (3)$$

$$\frac{127}{3512} (2)$$

$$\frac{127}{3256} (1)$$

○ ریاضی ۸۲

حاصل عبارت زیر، به ازای  $x = \sqrt{2}$  کدام است؟

$$A = (1 + x + x^2 + \dots + x^8)(1 - x + x^2 - \dots + x^8)$$

$$516(4)$$

$$512(3)$$

$$511(2)$$

$$507(1)$$

## درس ۱: مدل سازی

آنچه خواهید دید :

۱ معرفی دنباله

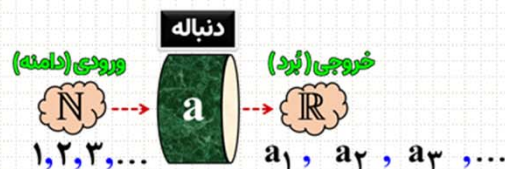
۲ چند دنباله معروف (حسابی - هندسی - مربعی - مثلثی - فیبوناچی)

۳ دنباله های درجه دوم - دنباله های دسته ای

۴ دنباله های بازگشتی

۵ مثلث خیام پاسکال

### معرفی دنباله



چهار جمله اول دنباله: $a_n = 2n + 1$	چهار جمله دوم دنباله: $a_n = (-1)^n$
$a_1 =$	$a_5 =$
$a_2 =$	$a_6 =$
$a_3 =$	$a_7 =$
$a_4 =$	$a_8 =$
	دنباله دو ضابطه ای
	$(-1)^n = \begin{cases} \text{زوج } n \\ \text{فرد } n \end{cases}$

○ تألیفی

اگر  $b_n = (-\frac{1}{2})^{n-1}$ ،  $d_n = n^2 + 1$  و  $c_n = \frac{1}{3n-1}$  باشد، حاصل  $b_4 + d_4 + c_4$  کدام است؟

- ۴(۱)      ۵(۲)      ۶(۳)      ۷(۴)

○ تألیفی

اگر  $a_n = \frac{1-n}{n+2}$ ،  $b_n = 3^{n-1}$  و  $c_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$  باشد، حاصل  $a_3 + b_3 + c_3$  کدام است؟

- ۴(۱)      ۵(۲)      ۶(۳)      ۷(۴)

○ تألیفی

حاصل ضرب چهار جمله اول دنباله  $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{n+1}$  کدام است؟

- $\frac{1}{5}$ (۱)       $-\frac{1}{5}$ (۲)       $\frac{1}{4}$ (۳)       $-\frac{1}{4}$ (۴)

○ تألیفی

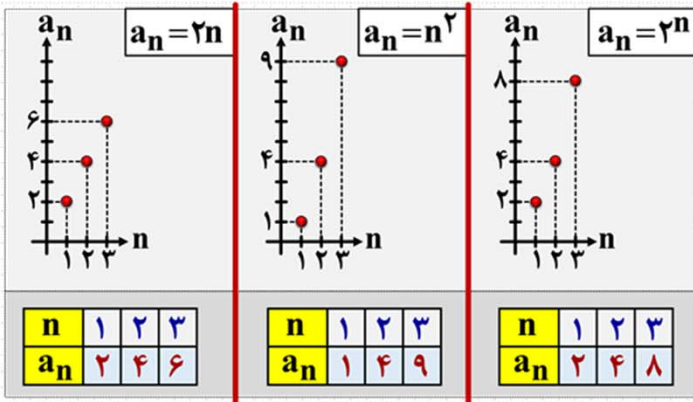
جمله چندم دنباله  $a_n = \frac{2n+1}{n+4}$  برابر  $\frac{23}{15}$  است؟

- (۱) جمله یازدهم  
(۲) جمله دوازدهم  
(۳) جمله سیزدهم  
(۴) جمله چهاردهم

○ مثال

$t_n = 4n^2 - 5$	$t_{2n+1} = 4n^2 - 5$	$t_{\frac{n+1}{n-1}} = 4n^2 - 5$
$t_5 =$	$t_5 =$	$t_5 =$

نمایش دنباله



تألیفی

اگر جمله هفتم دنباله با جمله عمومی  $b_n = \frac{an+1}{n+a+1}$  برابر  $1/5$  باشد، جمله سوم این دنباله کدام است؟

- $\frac{7}{6}$  (۴)     
   $\frac{7}{5}$  (۳)     
   $\frac{7}{4}$  (۲)     
   $\frac{7}{3}$  (۱)

تألیفی

در دنباله با جمله عمومی  $a_n = n^2 - 2n + 4$  سه نقطه متناظر با  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  را به هم وصل می کنیم. مساحت مثلث ایجاد شده کدام است؟

تألیفی

در دنباله  $a_{n+1} = \begin{cases} n^2 - 2 & \text{فرد } n \\ 3n + 1 & \text{زوج } n \end{cases}$  تفاضل جمله ششم از جمله نهم کدام است؟

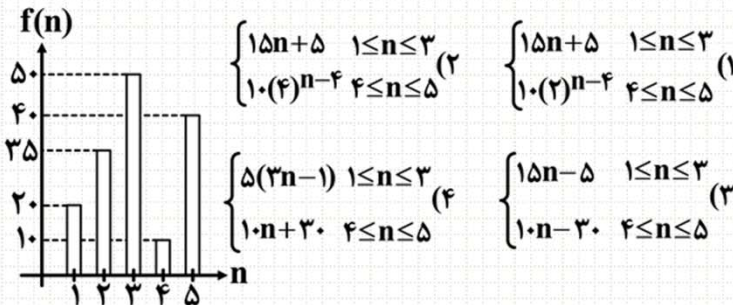
- $2/5$  (۴)     
   $2$  (۳)     
   $1/5$  (۲)     
   $1$  (۱)     
   $49$  (۴)     
   $6$  (۳)     
   $4$  (۲)     
   $2$  (۱)

تألیفی

نمودار میله ای زیر، تعداد مسافران پیاده شده، در هر ایستگاه یک خط مترو را نشان می دهد. اگر  $n$  شماره ایستگاه و  $f(n)$  تعداد مسافران پیاده شده از ایستگاه  $n$  ام باشد، ضابطه تابع  $f$  کدام است؟

تألیفی

در دنباله  $a_{n+1} = \begin{cases} kn^2 + n & \text{فرد } n \\ kn + 3 & \text{زوج } n \end{cases}$  اگر  $a_4 + a_{11} = 177$  باشد، حاصل  $\frac{a_{15} - k}{a_6}$  کدام است؟



- $\frac{14}{17}$  (۴)     
   $\frac{17}{14}$  (۳)     
   $\frac{23}{12}$  (۲)     
   $\frac{12}{23}$  (۱)

## درس ۱: مدل سازی

تألیفی

برای جدول زیر، ضابطه تابع  $f(n)$  نوشته شده است. حاصل  $f(6) - f(3)$  کدام است؟

$$f(n) = \begin{cases} 2n^2 + an & 1 \leq n \leq 3 \\ 4n + b(n-1) & 4 \leq n \leq 6 \end{cases}$$

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(n)	۵	۱۴	?	۳۱	۴۰	?

۲۴(۴)

۲۳(۳)

۲۲(۲)

۲۱(۱)

مثال

اگر تابع  $f$  یک مدل ریاضی برای هر کدام از مسائل زیر باشد، دامنه هر یک را مشخص کنید.

$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{N}$	مساحت دایره ای به شعاع $a$
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{N}$	تعداد مکالمات تلفن در هر ماه
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{N}$	سرعت لحظه ای یک ماشین
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{N}$	مدت زمان مطالعه در هر روز
$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{N}$	مصرف برق ماهیانه خانه ای از اول سال

تألیفی

دامنه تابع مدل کدام یک از گزینه ها، زیر مجموعه ای از اعداد طبیعی؟

(۱) محیط دایره ای به شعاع  $x$

(۲) دمای خانه در هر لحظه

(۳) سرعت لحظه ای دوندۀ دوی مارا تن

(۴) تعداد گل زده قهرمان جام جهانی فوتبال از اولین روز

چند دنباله معروف (حسابی - هندسی - مربعی - مثلثی - فیبوناتچی)

دنباله حسابی	دنباله هندسی
$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ $a_2 = a_1 + d$ $a_3 = a_1 + 2d$ $a_4 = a_1 + 3d$ $\vdots$ $a_n = dn + a_1 - d$ $1, 5, 9, 13, \dots$	$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ $a_2 = a_1 \times r$ $a_3 = a_1 \times r^2$ $a_4 = a_1 \times r^3$ $\vdots$ $a_n = a_1 \times r^{n-1}$ $4, 8, 16, 32, \dots$

مثال

تعداد مهره ها در شکل نهم؟

تعداد مربع ها در شکل دهم؟

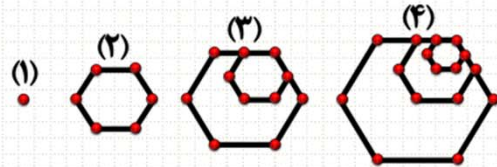
در شکل چندم تعداد ۶۴ تاست؟

در شکل چندم تعداد ۸۵ تاست؟

درس ۱: مدل سازی

تألیفی

مطابق الگوی زیر، در شکل چندم تعداد نقاط روی شکل به ۴۹۱ می رسد؟



- ۹۹(۱)      ۱۹۸(۲)      ۲۹۷(۳)      ۴۹۱(۴)

انسانی ۹۰

در دنباله مثلثی با جمله اول ۱، در جمله چندم عدد مربع کامل غیر از ۱ نوشته می شود؟

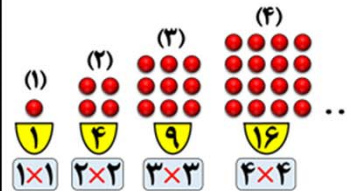
- (۱) ششم      (۲) هفتم      (۳) هشتم      (۴) نهم

خ انسانی ۹۷

در دنباله مثلثی، اولین جمله مربع کامل غیر از ۱، کدام است؟

- (۱) ۳۶      (۲) ۴۹      (۳) ۶۴      (۴) ۸۱

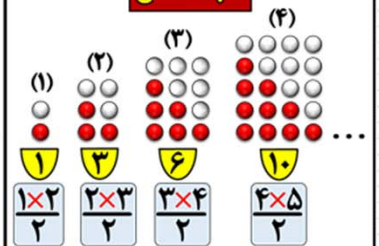
دنباله مربعی



جمله عمومی

$$a_n = n^2$$

دنباله مثلثی

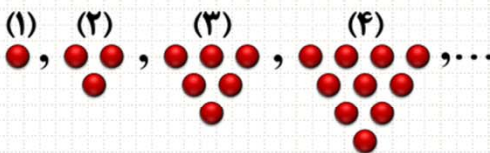


جمله عمومی

$$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

تألیفی

در کدام مرحله از الگوی زیر، تعداد نقاط برابر ۲۴۸۵ است؟



- (۱) ۶۰  
(۲) ۶۵  
(۳) ۷۰  
(۴) ۷۵

تألیفی

در دنباله مثلثی، مجموع هر دو جمله متوالی، کدام دنباله را تشکیل می دهند؟

- (۱) مربعی      (۲) مثلثی      (۳) هندسی      (۴) فیبوناتچی

خ انسانی ۹۲

در دنباله مربعی، هر جمله را از جمله بعدی آن کم می کنیم. اعداد حاصل کدام دنباله را تشکیل می دهند؟

- (۱) حسابی      (۲) هندسی      (۳) مثلثی      (۴) فیبوناتچی

### ○ تألیفی

اگر  $x+4$ ،  $2x-5$ ،  $4x-31$  و  $2x+y$ ، چهار جمله متوالی دنباله فیبوناتچی باشد،  $y$  کدام است؟ ( $x+4$  کوچکترین جمله است.)

**دنباله فیبوناتچی**

$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}, f_{15}$   
 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots$

بخش پذیری بر اعداد	مجموع $n$ جمله اول
$f_3, f_6, f_9, f_{12}, f_{15}, \dots$ ۲	$f_1 + \dots + f_5 = f_7 - 1$
$f_4, f_8, f_{12}, \dots$ ۳	$f_1 + \dots + f_6 = f_8 - 1$
$f_5, f_{10}, f_{15}, \dots$ ۵	$f_1 + \dots + f_8 = f_{10} - 1$

۸۸(۴)      ۸۶(۳)      ۸۴(۲)      ۸۲(۱)

### ○ تألیفی

جمله چندم از دنباله فیبوناتچی، دو واحد کمتر از مجموع جمله دهم دنباله مثلثی و جمله ششم دنباله مربعی است؟

۱۶۲۸(۴)      ۱۶۱۸(۳)      ۱۵۹۶(۲)      ۱۵۷۶(۱)

### ○ انسانی ۹۶

در دنباله فیبوناتچی، دو جمله آخر ۳۷۷ و ۶۱۰ می باشند. مجموع جملات این دنباله، کدام است؟

### دنباله های درجه دوم

$a_1, a_2, a_3, a_4$   
 $7, 13, 21, 31, \square, \dots$

$a_1, a_2, a_3, a_4$   
 $5, 8, 15, 26, \square, \dots$

### ○ خ انسانی ۸۹

از بین هجده جمله اول دنباله فیبوناتچی، چند جمله آن بر ۳ بخش پذیر است؟

۶(۴)      ۵(۳)      ۴(۲)      ۳(۱)

### ○ خ انسانی ۹۰

در دنباله فیبوناتچی، دومین عدد بخش پذیر بر ۱۳ کدام است؟

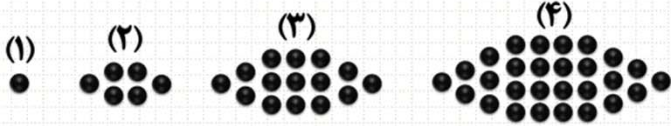
۴۰۳(۴)      ۳۹۰(۳)      ۳۷۷(۲)      ۳۶۴(۱)

# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: مدل سازی

تألیفی

شکل دهم در الگوی زیر چند نقطه دارد؟



۱۹۵(۴)      ۲۳۰(۳)      ۱۹۰(۲)      ۲۱۰(۱)

دنباله های دسته ای



تألیفی

اعداد طبیعی را به طریقی دسته بندی میکنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، مجموع جملات اول و آخر دسته یازدهم کدام است؟

(۱), (۲, ۳), (۴, ۵, ۶), ...

۱۲۶(۴)      ۱۲۴(۳)      ۱۱۲(۲)      ۱۲۲(۱)

انسانی ۹۸

در دنباله اعداد زیر، جمله دهم کدام است؟

۱, ۲, ۴, ۷, ۱۱, ۱۶, ...

جمله چهلم؟

۴۶(۴)      ۴۵(۳)      ۴۲(۲)      ۳۷(۱)

تألیفی

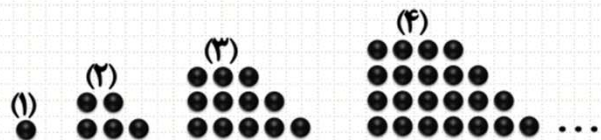
جمله بیستم دنباله زیر کدام است؟

$\frac{5}{2}, \frac{7}{5}, \frac{9}{10}, \frac{11}{17}, \dots$

$\frac{45}{401}(4)$        $\frac{43}{399}(3)$        $\frac{43}{401}(2)$        $\frac{45}{399}(1)$

انسانی ۹۸

در الگوی زیر، تعداد نقطه ها، در شکل نهم کدام است؟



۱۲۵(۴)      ۱۲۳(۳)      ۱۲۰(۲)      ۱۱۷(۱)



# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: مدل سازی

### تألیفی

اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، جمله وسط دسته یازدهم؟  
 $(1), (3, 5), (7, 9, 11), \dots$

۱۳۱(۴)      ۱۰۰(۳)      ۹۹(۲)      ۵۵(۱)

### تألیفی

اعداد طبیعی زوج را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات هر دسته برابر با شماره آن دسته باشد، مجموع اعداد درسته پانزدهم؟  
 $(2), (4, 6), (8, 10, 12), \dots$

۱۲۴۰(۴)      ۶۵۲۰(۳)      ۳۳۹۰(۲)      ۴۸۹۰(۱)

### دنباله های بازگشتی (معروف)

### مثال

$a_{n+1} = a_n + 2n + 1, a_1 = 1$   
 جمله بیست و سوم دنباله؟  
 ۹۴

$a_{n+1} = a_n + n, a_1 = 1$   
 جمله ششم دنباله؟  
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$   
 ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶

$a_{n+1} = a_n + (n+1), a_1 = 1$   
 جمله هشتم دنباله؟  
 ۹۱

$a_{n+1} = a_n + (n-1), a_1 = 3$   
 جمله ششم دنباله؟  
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$   
 ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, -۲

$a_{n+1} - a_n = 2n - 1, a_1 = 7$   
 جمله هفتم دنباله؟  
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$   
 ۷, ۵, ۳, ۱, -۱, -۳, -۵

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$   
 جمله سیزدهم دنباله؟  
 $a_1, a_2, a_{11}, a_{12}, a_{13}$   
 ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ۲۱, ۳۴, ۵۵, ۸۹, ۱۴۴, ۲۳۳

$a_{n+1} + a_n = (n+1)^2, a_1 = 7$   
 جمله بیستم دنباله؟

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$   
 جمله هفتم دنباله؟  
 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$   
 ۱, ۱, ۳, ۵, ۹, ۱۳, ۱۹

### دنباله های بازگشتی معروف در یک نگاه

- $a_{n+1} - a_n = \text{عدد}$  → دنباله حسابی → اسم دنباله
- $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \text{عدد}$  → دنباله هندسی → اسم دنباله
- $a_{n+1} - a_n = 2n + 1, a_1 = 1$  → دنباله مربعی → اسم دنباله
- $a_{n+1} - a_n = n + 1, a_1 = 1$  → دنباله مثلثی → اسم دنباله
- $a_{n+1} + a_n = (n+1)^2, a_1 = 1$  → دنباله مثلثی → اسم دنباله
- $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, a_1 = a_2 = 1$  → دنباله فیبوناچی → اسم دنباله

### مربعی

نمایش بازگشتی جمله عمومی  
 $a_1, a_2, a_3, a_4$   
 $1, 4, 9, 16, \dots$   
 $a_n = n^2$   
 $a_2 - a_1 = 3$   
 $a_3 - a_2 = 5$   
 $a_4 - a_3 = 7$   
 $\vdots$   
 $a_1 = 1$   
 $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$

### مثلثی

نمایش بازگشتی جمله عمومی  
 $a_1, a_2, a_3, a_4$   
 $1, 3, 6, 10, \dots$   
 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$   
 $a_2 - a_1 = 2$   
 $a_3 - a_2 = 3$   
 $a_4 - a_3 = 4$   
 $\vdots$   
 $a_1 = 1$   
 $a_{n+1} - a_n = (n+1)$   
 $a_2 + a_1 = 4$   
 $a_3 + a_2 = 9$   
 $a_4 + a_3 = 16$   
 $\vdots$   
 $a_1 = 1$   
 $a_{n+1} + a_n = (n+1)^2$

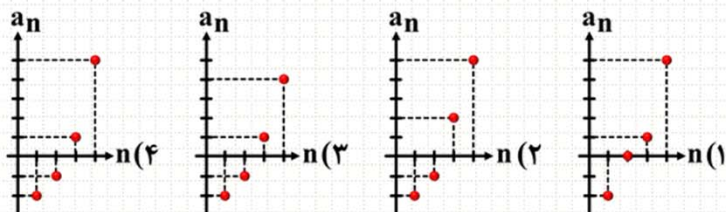
# فصل: الگوهای خطی

## درس ۱: مدل سازی

○ خ انسانی ۹۹

○ تألیفی

جمله هشتم از دنباله اعداد با رابطه  $a_1 = a_2 = 3$  و  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n - n$  و  $a_1 = -2$  با فرض  $a_n = 2a_{n-1} + 3$  نمودار دنباله با رابطه بازگشتی  $a_1 = -2$  کدام است؟



- ۲۳(۱)
- ۱۹(۲)
- ۱۷(۳)
- ۱۳(۴)

○ تألیفی

○ تألیفی

در دنباله  $a_1 = a_2 = 1$ ،  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ ، مجموع ارقام حاصل جمع پانزده جمله اول دنباله کدام است؟

در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = 2a_n + k$ ، اگر سه عدد  $x-1$ ،  $2x+1$  و  $6x+1$  به ترتیب سه جمله متوالی دنباله باشند، حاصل  $3x-k$  کدام است؟

- ۲۰(۱)
- ۲۱(۲)
- ۲۲(۳)
- ۲۳(۴)

- ۴(۴)
- ۳(۳)
- ۲(۲)
- ۱(۱)

○ تألیفی

○ خ انسانی ۰۰

در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = a_n + (-1)^n$  با فرض  $a_1 = 3$  جمله چهلم کدام است؟

جمله دهم دنباله بازگشتی  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$  و  $a_1 = 1$  کدام است؟

- ۳(۱)
- ۲(۲)
- ۲(۳)
- ۳(۴)

○ تألیفی

در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = 3 - a_n$ ، اگر  $a_1 = 3$  باشد، مجموع صد جمله اول دنباله کدام است؟

- ۵۰(۱)
- ۱۰۰(۲)
- ۱۵۰(۳)
- ۲۰۰(۴)

- ۱۴۴(۲)
- ۵۵(۱)
- ۳۷۷(۳)
- ۱۹(۴)

## درس ۱: مدل سازی

○ تألیفی

جمله بیستم دنباله با رابطه بازگشتی  $a_1 = 1$ ،  $a_{n+1} = \frac{1}{n + \frac{1}{a_n}}$  کدام است؟

- $\frac{1}{190}$  (۱)       $\frac{1}{191}$  (۲)       $\frac{1}{193}$  (۳)       $\frac{1}{194}$  (۴)

○ تألیفی

در دنباله بازگشتی  $a_1 = 24$  و  $a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{3}a_n & \text{فرد } n \\ 2(a_n) - 1 & \text{زوج } n \end{cases}$  جمله پنجم کدام است؟

- ۶ (۱)      ۷ (۲)      ۸ (۳)      ۹ (۴)

○ تألیفی

در دنباله  $a_{n+1} = 2a_n + 5$ ، اگر جمله دوازدهم برابر ۳۵ باشد، جمله نهم این دنباله کدام است؟

- ۱۰ (۳)      ۵ (۲)      ۱۵ (۴)      صفر (۱)

○ تألیفی

جمله هفدهم دنباله  $a_{n+1} = 2a_n - n$ ، با فرض  $a_2 = 125$  کدام است؟

- ۴۵ (۱)      ۴۰ (۲)      ۳۰ (۳)      ۳۱ (۴)

○ انسانی

در دنباله با رابطه بازگشتی  $a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + 1$ ، اگر  $a_{16} = \frac{1597}{987}$  جمله چهاردهم کدام است؟

- $\frac{233}{377}$  (۱)       $\frac{377}{610}$  (۲)       $\frac{377}{233}$  (۳)       $\frac{610}{377}$  (۴)